Math.p.
224
g-1

R

Math. P.
224 g. 1

<36636489150019

<36636489150019

Bayer. Staatsbibliothek

R

Anleitung

zur

Elementar-Arithmetik

von

Joh. Jos. Ign. Hoffmann.

Königlich Baierischem Schulrathe, Director des Lyceums und der Gymnasial-Anstalt zu Aschaffenburg, Professor der Mathematik und Physik ꝛc.

R.

Zweyte verbesserte und sehr vermehrte Auflage.

Offenbach,

verlegt und gedruckt bey Carl L. Brede.

1819.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Vorerinnerung

zur ersten Auflage.

Wenn ich die Menge der bereits vorhandenen arithmetischen Schriften mit einem neuen Buche dieser Art vermehre, so glaube ich verbunden zu seyn, die Ursachen anzugeben, welche mein Unternehmen rechtfertigen.

Ich würde zwar dem entschiedenen Werthe mehrerer Anleitungen zur Arithmetik zu nahe treten, wenn ich behaupten wollte, sie leisteten Dasjenige nicht, was sie nach dem besondern Plane ihrer Verfasser leisten sollen; allein selbst dieser Plan kann aus einem doppelten Gesichtspuncte betrachtet werden.

Einige schrieben fast ganz allein für das practische Rechnen. Es war ihnen mehr darum zu thun, Regeln zu geben, welche der Anfänger befolgen muß, um die im gemeinen Leben am häufigsten vorkommenden Rechnungsfälle aufzulösen, als diese Regeln selbst immer auf eine strenge und dabey faßliche Art zu beweisen.

Andere machten es sich zum Gesetze, die einzelnen Materien des arithmetischen Lehrgebäu-

des mit mathematischer Strenge darzustellen, und so die Arithmetik in ein zusammengedrängtes System zu bringen; allein sie wurden durch ihren oft allzu abstracten Vortrag den Anfängern unverständlich, und insofern auch unbrauchbar, als sie doch deren Belehrung zum Zwecke hatten.

Soll also ein arithmetisches Handbuch für Anfänger den Lernenden jenen Vortheil gewähren, welchen sie aus dem Studium dieses Theiles der Mathematik schöpfen können, d. h. sollen die Anfänger nicht nur rechnen lernen, sondern auch mit Einsicht und Ueberzeugung rechnen: so darf der Vortrag weder zu gedrängt und abstract seyn, um die Fassungskräfte der Lernenden nicht zu übersteigen, oder ihre Lernbegierde abzuschrecken; noch dürfen Sätze in den Vortrag eingemengt werden von deren Richtigkeit sich Dieselbe durch faßliche Beweise nicht überzeugen können.

Mein Bemühen war daher bey den folgenden Anfangsgründen hauptsächlich darauf gerichtet, Gründlichkeit mit Faßlichkeit zu verbinden, und die einzelnen Lehren so darzustellen, daß keine dieser beyden Eigenschaften der andern einigen Abbruch thun mögte. Zugleich bestrebte ich mich, solche Rechnungen weitläufiger darzustellen, welche in dem gemeinen Leben von entschiedenem practischen Nutzen sind.

Auch dehnte ich mich deshalb nicht über alle jene Gegenstände aus, welche andere Schriftsteller gewöhnlich in dergleichen Anfangsgründen abzuhandeln pflegen, weil ich nur für die ersten Anfänger schrieb, welchen diese Anleitung als eine Grundlage dienen kann, worauf sie ein erweitertes Studium der Arithmetik mit desto größerm Nutzen bauen können.

Es scheint mir überflüssig, alle Sätze besonders anzuführen, welche ich auf eine strengere oder faßlichere Art dargestellt zu haben glaube, indem dieselbe dem sachkundigen Leser ohnehin nicht entgehen werden.

Sollte mir es übrigens gelungen seyn, daß diese Anfangsgründe den Beyfall unpartheyischer Sachverständigen erhielten, so würde eine Anleitung zur Geometrie, nach ähnlichem Plane entworfen, bald nachfolgen. *)

---

*) Diese, inzwischen erschienene, Schriften sind:

1. Geometrische Anschauungslehre. Mit 7 Steintafeln. Zweyte Auflage. Mainz, b. Kupferberg. 1818.

2. Geometrische Wissenschaftslehre. Mit 6 Steintafeln. Ebendaselbst. 1816.

Vorwort

zur zweyten Auflage.

Der Herr Verleger meiner Anleitung zur Arithmetik für Anfänger hat mich um Besorgung einer neuen Auflage dieser Schrift ersucht. Das mathematische Publicum empfängt dieselbe hiermit nicht nur vielfach verbessert, sondern auch dergestalt vermehrt, daß aus einem Bändchen nunmehr zwey geworden sind.

Es hat mir zweckmäßig geschienen, die Elementar-Arithmetik in die niedere und höhere abzutheilen. Zu jener rechne ich die Lehre von den Zahlen überhaupt, von den ganzen Zahlen, von den Decimalbrüchen, von den benannten Zahlen, von den gemeinen Brüchen, und von den Verhältnissen und Proportionen. Diese aber enthält die entgegengesetzten Zahlen, die Buchstabenrechnung, die Ausziehung der Quadrat-

und Cubikwurzel, die Progressionen, und die Logarithmen.

Diese Eintheilung habe ich nicht aus Neuerungssucht, sondern in der Ueberzeugung aufgestellt, daß mit der Lehre von den entgegengesetzten Zahlen und der Buchstabenrechnung der Anfänger wirklich eine höhere arithmetische Stufe betritt. Auch begnügen sich sehr viele Schüler schon mit jenem Unterrichte, welchen sie in der niedern Elementar-Arithmetik empfangen haben. Für Solche ist das erste Bändchen dieser Schrift hinreichend. Die Zöglinge der gelehrten Schulen aber, so wie Jene, welche sich die Anfangsgründe der gesammten Zahlenlehre aneignen wollen, müssen auch dem zweyten Bändchen ihr Studium widmen.

Da dieses Lehrbuch, bey der ersten Auflage, in sechs Abtheilungen die Lehre von den Zahlen überhaupt, von den ganzen Zahlen, von den benannten Zahlen, von den gebrochenen Zahlen, von den Vergleichungen der Zahlen, und von der Ausziehung der Quadratwurzel vorgetragen hatte: so sieht man hieraus die bedeutende Vermehrung, mit welcher es nun erscheinet, und ich habe nichts mehr hinzuzufügen,

als den Wunsch, daß diese Schrift auch nun wieder den Beyfall der Sachverständigen erhalten, und bey dem öffentlichen und privat Unterrichte recht nützlich werden möge.

Aschaffenburg, im November 1818.

Der Verfasser.

Inhalt

des

ersten Theils.

Einleitung.

Seite.

Begriff und Theile, Methode, Nutzen der Mathematik. . . . . 1 bis 10.

Erste Abtheilung.

Von den Zahlen überhaupt . . . . 13 — 24.

Zweyte Abtheilung.

Von den ganzen Zahlen . . . . 24 — 58.

Dritte Abtheilung.

Von den Decimalbrüchen . . . . 59 — 88.

Vierte Abtheilung.

Von den benannten Zahlen . . . . . . 89 — 104.

Fünfte Abtheilung.

Von den gemeinen Brüchen . . . . . S. 105 — 139

Sechste Abtheilung.

Von den Verhältnissen und Proportionen . . 140 — 218

Einleitung.

Der Zweck dieser Einleitung ist eine kurze Entwickelung des Begriffs und der Haupttheile; der Methode und des Nutzens der Mathematik.

I. Begriff und Haupttheile.

Unter der Mathematik oder Größenlehre versteht man die wissenschaftliche Lehre von den Größen. Ihr Zweck ist, dieselbe genau zu bestimmen und nach scharfem Verhältniße zu vergleichen.

Was die Größe eigentlich sey, kann nicht streng erklärt werden; denn ihr Begriff ist ein einfacher, welcher sich, bey der allmähligen Entwickelung des Geistes, in jedem Menschen mit großer Klarheit erzeugt. Zur Erläuterung kann man sagen, die Größe sey alles Dasjenige, was sich vermehren oder vermindern läßt; z. B. eine Zahl, eine Linie, ein Gewicht, eine Kraft u. s. w.

Man kann die Größe entweder blos an sich betrachten, oder so, wie sie an wirklichen Gegenständen der Natur erscheint. Jene Betrachtung heißt eine reine, diese eine angewandte. Daher zerfällt das große Gebiet der mathematischen Lehre in

zwey Haupttheile, welche man reine und angewandte Mathematik nennt. Die Betrachtung der Zahl 8, als eine Menge von 8 gleichartigen Dingen überhaupt; oder der Linie, als bloße Ausdehnung in die Länge; des Dreyecks, als eines dreyseitigen Flächenraums u. s. w. gehört in die reine Mathematik. Eine Zahl von 12 Gulden; eine gerade Linie, als Höhe eines Thurmes; eine dreyeckige Figur auf dem Felde, als Wiese, Acker u. s. w. gehört aber zur angewandten Mathematik.

Hieraus ist von selbst klar, daß die reine Mathesis, bey dem wissenschaftlichen Studium, der angewandten vorhergehen müße, da sich jene zu dieser, wie die Theorie zur Praxis verhält.

Die reine Mathematik hat wieder zwey große Abtheilungen, welche man die Arithmetik oder Zahlenlehre, und die Geometrie oder Raumlehre nennt. Die Größe überhaupt ist nämlich entweder eine unstetige, d. h. eine solche, deren Natur nur von der Menge ihrer Theile, nicht aber von der Art ihrer Verbindung zu einem Ganzen abhängt. Dergleichen Größen sind die Zahlen. Denn ihr Werth wird blos durch die Menge ihrer Einheiten bestimmt, wobey man gar nicht auf die Ordnung in ihrer Verbindung sieht. Oder die Größen sind von der Art, daß man vorzüglich auf die Art zu sehen hat, wie die Theile zum Ganzen verbunden sind. Diese Theile hängen so innig zusammen, daß sie ein stetig fortschreitendes Ganzes bilden. Solche Größen heißen stetige. Linien, Flächen und Körperräume erläutern dieses.

Die Arithmetik oder Zahlenlehre ist daher jener Theil der Mathematik, welcher sich mit den un-

stetigen Größen; die Geometrie oder Raumlehre aber jener Haupttheil, welcher sich mit den stetigen Größen beschäftigt.

Hieraus ersieht man auch, daß es sowohl eine reine und angewandte Zahlenlehre, als eine reine und angewandte Raumlehre gebe.

Die angewandte Mathematik läßt sich füglich in vier Haupttheile fassen, welche man die mechanischen, optischen, astronomischen und technischen Wissenschaften nennt.

Die mechanischen Wissenschaften beschäftigen sich mit Bestimmung des Verhältnißes der Kräfte in der Natur und Kunst. Dahin gehört z. B. die Statik d. h. die Lehre vom Gleichgewichte fester Körper; die Mechanik d. h. die Lehre von der Bewegung fester Körper; die Hydrostatik d. h. die Lehre vom Gleichgewichte liquider Körper; die Hydraulik d. h. die Lehre von der Bewegung tropfbarer Flüssigkeiten u. a.

In den optischen Wissenschaften werden die Erscheinungen, welche das Licht zeigt, nach ihrem Maaße bestimmt. Die Optik, im engern Sinne, lehrt die Gesetze des sich geradlinig verbreitenden Lichtes; die Catoptrik untersucht die Gesetze der Zurückwerfung des Lichts von spiegelnden Oberflächen, und die Dioptrik bestimmt die Gesetzmäßigkeit der Brechung des Lichtes d. h. der Abweichung der Strahlen bey ihrem Uebergange aus einem durchsichtigen Körper in den andern.

Der Gegenstand der astronomischen Wissenschaften ist sowohl die Erde, als jeder sichtbare Himmelskörper. Ihre Aufgabe ist, alles Meßbare, z. B. die Größe, die Gestalt, die Abstände, die Bewegungen u. s. f. der himmlischen Körper zu bestimmen.

Zu den technischen Wissenschaften gehören alle jene, welche, ausser den Lehren der Physik, zu ihrer Vollkommenheit mancherley mathematische Hülfssätze bedürfen. Die bürgerliche Baukunst, die Kriegsbaukunst, die Artillerie, die Schiffsbaukunst, die Steuermannskunst, und mehrere andere, gehören hieher.

II. Methode.

Unter mathematischer Methode versteht man die den Mathematikern eigene Art und Weise, ihre Lehren zu begründen und darzustellen. Sie ist das Bild und Muster einer streng wissenschaftlichen Methode. Sie beginnt mit Erklärungen, aus welchen Grundsätze abgeleitet werden. Auf diese folgen Lehrsätze und Aufgaben, welche in Zusätzen und Anmerkungen theils erweitert, theils erläutert werden. Auch bedienen sich die Mathematiker bisweilen der willkührlichen Sätze und der Lehnsätze.

Eine Erklärung ist die vollständige Angabe der Merkmale eines Begriffs. Sie dient zur Aufklärung dieser Begriffe, und ist die Grundlage des wissenschaftlichen Gebäudes. Die Sätze: eine Zahl ist die Vorstellung der Vielheit gleichartiger Gegenstände; oder das Dreyeck ist eine von drey Linien begränzte Fläche, sind Beyspiele von Erklärungen.

Diese Erklärungen sind entweder Wort-Erklärungen, wenn man blos den Begriff bestimmt, welchen man man mit einem gewissen Worte verbindet, ohne die Möglichkeit des dem Begriffe entsprechenden Gegenstandes nachzuweisen; z. B. Das Quadrat ist ein Viereck von vier gleichen Seiten und vier rechten Win-

keln. Oder die Erklärungen sind Sach-Erklärungen, d. h. solche, woraus man zugleich die Entstehung des erklärten Gegenstandes erkennt; z. B. ein Bruch ist eine Zahl, welche entsteht, wenn man ein Ganzes in willkürlich viele gleiche Theile theilt, und von diesen Theilen einige nimmt; oder die Kreislinie ist jene krumme Linie, welche der eine Endpunct einer geraden Linie beschreibt, die sich in der nämlichen Ebene um den andern Endpunct einmal ganz herumbewegt.

Grundsätze überhaupt sind jene Sätze, welche, ihrer Einfachheit wegen, von selbst einleuchten. Man Theilt sie in Axiome, welche Behauptungen enthalten und in Postulate, welche Foderungen aussprechen. Die Sätze: jede Größe ist sich selbst gleich; ein Theil ist kleiner als das Ganze; wenn a so groß wie b, und b so groß wie c ist, so ist auch a so groß wie c, u. s. w. sind Axiome. Aber die Sätze: eine gegebene Zahl größer zu machen; eine gerade Linie über beyde Endpuncte zu verlängern u. s. w. sind Postulate oder Foderungen.

Ein Lehrsatz oder Theorem ist ein Satz, welcher eine Behauptung enthält, deren Wahrheit nicht unmittelbar für sich selbst schon einleuchtet. So ist der Satz: Wenn man den Zähler und den Nenner eines Bruches mit der nämlichen Zahl multiplicirt oder dividirt, so bleibt der Bruch an seinem Werthe unverändert, ein Lehrsatz, weil der Grund seiner Wahrheit nicht von selbst einleuchtend ist. Zur Vollständigkeit des Lehrsatzes gehört somit noch der Beweis, d. h. die Entwickelung der Gründe, wodurch der Verstand genöthigt wird, der Behauptung seinen Beyfall zu schenken.

Der Beweis ist entweder ein directer, oder ein indirecter. Bey jenem wird die Wahrheit der Be-

hauptung aus dem innern Zusammenhange von Grund und Folge; bey diesem aber aus der Unmöglichkeit ihres Gegentheils erkannt. Beyde Beweisarten gewähren, wenn sie richtig sind, gleiche Ueberzeugung; doch hat der directe Beweis, in Bezug auf die innere Einsicht in die Verkettung der Wahrheiten, vor dem indirecten Beweise einigen Vorzug. Jener heißt auch der ostensive, dieser der apagogische. Wenn sich der Beweis über die Gleichheit z. B. zweyer geraden Linien darauf gründet, daß beyde, mit demselbigen Maaße gemessen, als Gleichvielfache dieses Maaßes erscheinen, so ist er ein directer Beweis. Wird aber ihre Gleichheit daraus erkannt, daß man auf einen Widerspruch kömmt, wenn angenommen würde, die erste Linie sey größer oder kleiner als die zweyte, so ist der Beweisgrund indirect.

Aufgaben oder Probleme sind Sätze, welche eine Foderung enthalten, die nicht so einfach ist, daß man ihr unmittelbar für sich selbst schon entsprechen kann. Der Satz: zwey oder mehrere gegebene Brüche unter einerley Benennung zu bringen, ist eine Aufgabe, da man noch nicht aus ihrem Sinne einsieht, wie dieser Foderung Genüge geleistet wird. Daher gehört noch zur Aufgabe die Auflösung, d. h. die bestimmte Angabe der Art und Weise, wie man zu verfahren habe, um der Foderung zu entsprechen. Der Auflösung folgt noch der Beweis, d. h. die Zusammenstellung der Gründe, wodurch sich der Verstand von der Richtigkeit der Auflösung überzeuget.

Aus dem Bisherigen wird man leicht einsehen, worin der Lehrsatz mit dem Axiome, die Aufgabe mit dem Postulate übereinstimmt, und worin beyde wieder unter

sich verschieden sind. Auch wird der Lehrer Alles Dieses mit schicklichen Beyspielen erläutern.

Unter Zusätzen oder Corollarien versteht man alle Sätze, welche aus schon als wahr erkannten Lehren so einfach folgen, daß es keines neuen Beweises für sie bedarf. Es sind daher leichtverständliche Folgerungen aus früheren Wahrheiten. Nachdem z. B. erwiesen ist, daß ein Bruch 6 mal größer wird, wenn man seinen Zähler, bey unverändertem Nenner, mit 6 multiplicirt, so ist es ein Zusatz, wenn man sagt: Ein Bruch wird mit einer gegebenen Zahl multiplicirt, wenn man seinen Zähler mit derselben multiplicirt, und den Nenner unter dieses Product setzt. — Daß die Zusätze auch Foderungen und deren Auflösungen enthalten können, versteht sich hieraus von selbst.

In den Anmerkungen oder Scholien wird Alles Jene vorgetragen, was auf irgend eine Art lehrreich und wissenswürdig, doch aber zum systematischen Vortrage eben nicht gerade nothwendig ist. Dahin gehören z. B. andere Beweise der Lehrsätze, abgeänderte Auflösungen der Aufgaben, Erläuterung der allgemeinen Lehren durch Beyspiele, literärische Notizen jeder Art, u. s. w.

Willkührliche Sätze heissen jene Vorschriften, welche nicht in der Natur der Sache, sondern in dem Einverständnisse der Menschen gegründet sind. Daß wir in unserer Arithmetik auf zehn zählen, und so nach zehnfach höhern Ordnungen zu Hunderten, Tausenden u. s. w. aufsteigen, ist eine blos willkührliche Annahme; denn man hätte auch auf acht, auf zwölf u. s. f. zählen können. — Eben so ist es willkührlich, daß jede Ziffer, welche einer andern zur Linken steht,

vermöge dieser Stelle, einen zehnmal größern Werth erhalte. — Hierbey bemerke man, daß diese Willkühr in einigen Vorschriften der Mathesis die strenge Allgemeinheit und Nothwendigkeit ihrer Lehren nicht aufhebe. Denn die Natur dieser willkührlichen Sätze besteht darin, daß man unter mehreren Fällen, wovon aber einer nothwendiger Weise Statt finden muß, einen solchen wählet, welcher vorzüglich bequem zur Erreichung eines gewissen Zweckes ist. — So ist es z. B. zur Bildung eines brauchbaren Zahlensystems in der Arithmetik durchaus nothwendig, auf eine bestimmte Menge von Einheiten zu zählen, und nach diesem Gesetze die höhern Ordnungen zu bestimmen; allein willkührlich ist es gewesen, daß man gerade auf zehn gezählt und hierdurch das zehntheilige System in der Arithmetik eingeführt hat. Ganz zufällig scheint aber diese Annahme deshalb nicht gewesen zu seyn, weil zehn auch die Zahl der menschlichen Finger ist, und ein Instinct den Menschen schon antreibt, an den Fingern zu zählen.

Lehnsätze oder Lemmen heißen jene Sätze, welche theils aus einer andern Wissenschaft, theils aus einem andern Theile der nämlichen Wissenschaft entlehnt, und, um dem Vortrage eine größere Vollständigkeit zu geben, in denselben aufgenommen werden. So können z. B. in der Geometrie Lehnsätze aus der Arithmetik, Optik, Astronomie; in der Arithmetik Lehnsätze aus der Geometrie, Landwirthschaft, Forstwissenschaft, u. s. w. vorkommen. Hieraus sieht man, daß die Lehnsätze nicht zum abgeschloßnen System einer mathematischen Wissenschaft, sondern zu mancherley Anwendungen derselben gehören.

III. Nutzen.

Der hohe Werth der Mathesis geht aus dem Einflusse hervor, welchen ihr gründliches Studium theils auf die kräftige Bildung des Geistes, theils auf das Wohl des bürgerlichen Lebens äussert. Jenen Nutzen kann man den formalen oder subjectiven, diesen den materialen oder objectiven nennen.

Da die mathematische Lehre mit deutlichen Erklärungen beginnt, so bauet sie hierdurch auf festbestimmte Begriffe und vermeidet Zweydeutigkeit und Wortstreit. Aus diesen Erklärungen werden einfache und klare Sätze abgeleitet, welche den Grund ihrer Wahrheit so evident in sich tragen, daß sie Jeden überzeugen, sobald er nur ihren Sinn versteht. Diese Grundsätze werden sodann zur fernern Begründung von Lehrsätzen und Aufgaben dergestalt angewendet, daß kein Satz ohne strenge Nachweisung seines Grundes aufgestellt wird. Der Verstand, welcher diesem systematischen Gange folgt, übt und verstärkt durch diese Uebung seine eigne Kraft. Daher ist die Mathesis ein so äusserst wirksames Bildungsmittel des Verstandes; eine Wahrheit, welche zu allen Zeiten allgemein anerkannt worden ist. Wem daher an Gründlichkeit im Denken etwas gelegen ist, der widme sich mit Ernst und Eifer dieser geiststärkenden Lehre. Doch führt nicht jede Art des Studiums zum hohen Ziele. Aus der Quelle einer klaren Anschauung und der thätigen Verstandeskraft entsprungen, fodert die Mathesis wiederum Beydes von ihren Schülern. Nicht in einem überzeugungslosen Auswendiglernen der Behauptungen und Vorschriften besteht das ächt-mathematische Wissen, sondern in der errungenen Klarheit

der Grundbegriffe und in der vollen Ueberzeugung von der Wahrheit der Sätze. Bloßes unthätiges Auffassen mathematischer Lehren erzeugt blinden Mechanismus, den gefährlichsten Feind strenger Wissenschaften. Man sage nicht, die Mathesis bilde den Geist einseitig und der Mathematiker erwerbe sich nur die Fähigkeit über Gegenstände seiner Wissenschaft gründlich zu urtheilen. Denn die Gesetze des richtigen Denkens sind allgemein, und für jedes Denken im Besondern geltend; und der Geist, welcher in mathematischen Verhältnissen gründlich denkt, erhält hierdurch die Fertigkeit, über jedes andere Verhältniß in anderen Wissenschaften und im Leben mit Leichtigkeit und Sicherheit zu urtheilen.

Was nun die Mathematik in ihren Anwendungen betrifft, so sind dieselbe so höchst mannigfaltig, daß man sie hier nicht alle aufzählen kann. Die Unentbehrlichkeit der practischen Rechenkunst unter den besondern Namen: mercantilische, politische, juristische Arithmetik, und der practischen Feldmeßkunst (niedere und höhere; die Markscheidekunst, das Nivelliren u. s. f.) für das bürgerliche Leben ist Jedermann bekannt. Kein Theil der angewandten Mathematik (Siehe oben II.) ist ohne vielfachen Einfluß auf Künste, Fabrikwesen oder Gewerbe. Die Naturkunde bedarf zu ihrer Vollkommenheit der Mathesis. Den Cameral- und Finanz-Wissenschaften, der Forstwissenschaft, Oeconomie und vielen andern dient sie als unentbehrliche Hülfslehre.

Der

Elementar-Arithmetik

Erster Theil;

die

niedere Elementar-Arithmetik,

oder:

I. Von den Zahlen überhaupt,
II. Von den ganzen Zahlen,
III. Von den Decimalbrüchen,
IV. Von den benannten Zahlen.
V. Von den gemeinen Brüchen.
VI. Von den Verhältnissen und Proportionen.

Erste Abtheilung.

Von den Zahlen überhaupt.

§. 1. Erklärung. Bey Begründung strenger Wissenschaften kömmt es vorzüglich auf scharfe Bestimmung der Begriffe an. Denn durch die Begriffe werden die ihnen entsprechenden Gegenstände erkannt. Das Mannigfaltige, aus dessen Verbindung die Natur des Begriffs hervorgeht, nennt man die Merkmale des Begriffs, oder auch die Merkmale des Gegenstandes. Daher kann das Wesen der Begriffe und ihrer Objecte nur durch die Angabe ihrer Merkmale bestimmt werden.

§. 2. Anmerkung. Zur Erläuterung (von §. 1.) ein Beyspiel. Wenn man sagt: das Mineral ist ein unorganischer Naturkörper, so sind unorganisch und Naturkörper die Merkmale des Begriffs Mineral. — Auf ähnliche Art findet man in dem Begriffe Pflanze die Merkmale: Naturkörper, organisch, unbeseelt; in dem Begriffe Thier die Merkmale: Naturkörper, organisch, beseelt; in dem Begriffe Mensch die Merkmale: Naturkörper, organisch, beseelt, vernünftig, u. s. f. der Inbegriff dieser Merkmale bestimmt die Natur der Begriffe und ihrer Gegenstände.

§. 3. Erklärung. Die Merkmale (§. 1.) der Gegenstände sind entweder mehreren mit einander gemein, oder sie kommen nur einigen von ihnen zu und andern nicht. Jene heißen gemeinschaftliche, diese unterscheidende Merkmale.

§. 4. Anmerkung. In §. 2. ist das Merkmal: Naturkörper, in Bezug auf Mineral, Pflanze, Thier und

Mensch ein gemeinschaftliches, das Merkmal beseelt aber, in Hinsicht auf Pflanze und Thier, ein unterscheidendes.

§. 5. Erklärung. Da die Gegenstände sowohl gemeinschaftliche, als unterscheidende Merkmale (§. 3.) haben, so können sie auch in dieser zweyfachen Rücksicht mit einander verglichen werden. Man nennt sie gleichartig, oder von einerley Art, wenn sie nach ihren gemeinschaftlichen; ungleichartig, oder von verschiedener Art, wenn sie nach ihren unterscheidenden Merkmalen betrachtet werden.

§. 6. Anmerkung. Ein Pferd und ein Hirsch haben, als Thiere betrachtet, vollkommen einerley Merkmale, und sind daher in dieser Rücksicht gleichartig (§. 5.). Aber als Pferd und als Hirsch gehören beyde zu verschiedener Art, und sind daher ungleichartig (§. 5.). Desgleichen sind mehrere Deutsche und Franzosen, als Europäer betrachtet, gleichartig; denn sie haben als solche einerley Merkmale. Wird aber der Deutsche als Bewohner von Deutschland, und der Franzose als Einwohner von Frankreich angesehen, so gehören beyde in dieser Rücksicht zu verschiedenen Nationen von Europa, und sind folglich ungleichartige Dinge.

§. 7. Erklärung Die Vorstellung der Vielheit gleichartiger Dinge (§. 5.) heißt eine Zahl, und eines von diesen gleichartigen Dingen wird die Einheit genennt. Folglich ist die Zahl eine Vielheit von Einheiten. Da diese Vielheit bestimmt oder unbestimmt seyn kann, so ist auch die Zahl selbst eine bestimmte oder eine unbestimmte.

§. 8. Anmerkung. Wer sich z. B. ein Pferd vorstellt, kann sich diesen Gegenstand auch noch öfter zugleich denken. Hieraus entsteht eine gewisse Vielheit oder Menge, d. h. eine Zahl von Pferden, und die Einheit dieser Zahl ist eins der Pferde, welche man sich vorstellt. — Ein Deutscher und ein Franzose machen, als solche, d. h. den Deutschen als Deutschen, und den Franzosen als Franzosen betrachtet, nicht die Zahl von zwey aus; denn es sind weder

zwey Deutsche, noch zwey Franzosen. Allein Beyde sind doch Europäer, und nach diesem Merkmale gleichartige Dinge. Daher geben sie zusammen die Zahl von zwey Europäern, und die Einheit dieser Zahl ist ein Europäer. — Die Zahlen sechs, acht, zwölf u. s. w. sind bestimmte; die Zahlen a, b, n u. dgl. aber unbestimmte Zahlen.

§. 9. Grundsatz. Die Einheiten, (§. 7.) aus deren Verbindung eine Zahl (§. 7.) entsteht, müssen gleichartig (§. 5.) seyn. Daher können ungleichartige Dinge nie in eine Zahl zusammengebracht werden.

§. 10. Anmerkung. Eine Zahl von acht Deutschen besteht aus acht Einheiten, deren jede ein Deutscher ist. Eben so ist eine Zahl von fünf Franzosen eine Menge von fünf Einheiten, deren jede ein Franzose ist. In beyden Zahlen ist die Einheit verschieden. Daher kann aus ihnen keine einzige dritte Zahl gebildet werden. Nimmt man aber aus beyden das gemeinschaftliche Merkmal Europäer, so sind dieselbe in dieser Rücksicht gleichartig, und geben zusammen eine Zahl von dreyzehn Europäern.

§. 11. Grundsatz. Die Zahlen sind Mengen von Einheiten (§. 7.). Nun wird aber diese Menge um so größer seyn, je mehr Einheiten vorhanden sind, und um so kleiner, je weniger man derselben zusammennimmt; folglich wird diejenige Zahl, welche aus mehreren Einheiten besteht, größer seyn, als eine andere, welche aus wenigern zusammengesetzt ist. Ueberhaupt werden alle Veränderungen, welche mit allen Einheiten der Zahlen vorgenommen werden, auch mit den Zahlen selbst, und umgekehrt, geschehen müssen.

§. 12. Erklärung. Eine Zahl, welche aus mehreren Einheiten besteht, heißt die größere Zahl in Rücksicht einer andern, welche aus wenigern Einheiten zusammengesetzt ist. Diese letztere hingegen wird in Bezug auf jene die kleinere Zahl genennt. Gleiche

Zahlen sind solche, welche aus gleichvielen Einheiten bestehen. Ungleiche hingegen, von welchen die eine größer als die andere ist.

§. 13. Grundsatz. Der Begriff der Einheit (§. 7.) ist zwar ein bestimmter, unveränderlicher Begriff; allein die Einheit selbst kann bald größer, bald kleiner angenommen werden.

§. 14. Zusatz. Soll also eine Zahl in jeder Rücksicht bestimmt seyn, so kömmt es, nebst der Menge ihrer Einheiten, zugleich auch auf die ursprüngliche Größe dieser Einheiten an, denn beydes bestimmt den Werth der gegebenen Zahl.

§. 15. Anmerkung. Hier und in der Folge setzt man die verschiedene Größe der Einheit ganz ausser Augen, und sieht blos auf die vorhandene Menge derselben. Nimmt man aber nebst der Menge auch noch auf die besondere Größe (oder Art) der Einheiten Rücksicht, so entspringt hieraus eine eigne Rechnung (die Rechnung in benannten Zahlen) wovon in der Folge geredet wird.

§. 16. Grundsatz. Die Veränderungen mit den Zahlen hängen von den Veränderungen mit ihren Einheiten ab (§. 11.). Alle Veränderungen, welche aber mit den Einheiten vorgenommen werden können, bestehen darin, daß man Einheiten zusetzt, oder solche hinwegnimmt. Folglich werden die Zahlen verändert, indem man ihnen Einheiten zusetzt, oder Einheiten von ihnen wegnimmt.

§. 17. Erklärung. Einheiten, woraus eine Zahl besteht, ihr zusetzen, heißt diese Zahl vermehren. Solche Einheiten von ihr wegnehmen, heißt die Zahl vermindern. Vermehren und Vermindern sind daher die zwey Hauptveränderungen, welche man mit den Zahlen vornehmen kann.

§. 18. Erklärung. Eine Zahl wird vermehrt, indem man ihr neue Einheiten zusetzt (§. 17.) Eine Zahl ist aber schon eine Menge von Einheiten (§. 7.) Daher wird auch eine Zahl vermehrt, indem man ihr eine oder mehrere andere Zahlen beyfügt. Dieses Zusetzen kann nun auf doppelte Art geschehen. Entweder kommen zu der einen Zahl nach und nach andere, welche unter sich ungleich (§. 12.) sind, oder eine und die nämliche Zahl wird mehrmahl zu sich selbst gesetzt. Im ersten Falle heißt die Vermehrung durch ungleiche Zahlen mit einem besondern Worte die Addition; im letzten hingegen wird die Vermehrung mit gleichen Zahlen die Multiplication genannt.

§. 19. Anmerkung. Wer sich eine Zahl von sechs Einheiten vorstellt, und nun z. B. noch eine andere von acht, eine von fünf, eine dritte von zehn Einheiten ihr zusetzt, der vermehrt die angenommene Zahl sechs mit verschiedenen ungleichen Zahlen, d. h. er addirt (§. 18.). Wer hingegen die erste Zahl sechs mehrmal, z. B achtmal, zu sich selbst setzt, und so diese Zahl durch sich selbst vermehrt, der multiplicirt (§. 18.) die sechs mit der Zahl acht.

§. 20. Anmerkung. Die Addition und die Multiplication (§. 18.) sind folglich die einzigen möglichen Veränderungen der Zahlen in Rücksicht ihrer Vermehrung (§. 17.).

§. 21. Erklärung. Eine Zahl wird vermindert, wenn man Einheiten, woraus sie besteht, von ihr wegnimmt (§. 17.). Die Zahl wird daher auch vermindert, indem eine andere Zahl von ihr weggenommen wird. Dieses Hinwegnehmen kann aber wieder auf zweyerley Art geschehen. Entweder nimmt man eine kleinere Zahl von einer größern nur einmal, oder man

nimmt sie so oft weg, als es geschehen kann. Jene Veränderung mit der Zahl heißt die Subtraction, diese die Division.

§. 22. Anmerkung. Man denke sich eine große Zahl zwölf und eine kleine vier, und nehme nun von der ersten die letztere einmal hinweg, so wird jene um so viele Einheiten vermindert, als diese in sich enthält, und diese Art der Verminderung ist die Subtraction (§. 21.). Wird hingegen die kleine Zahl vier von der großen zwölf so oft hinweggenommen, als es geschehen kann, d. h. so oft, bis von dieser letzten entweder nichts, oder weniger übrig bleibt, als die kleine beträgt, so wird diese Verminderung die Division (§. 21.) genennt.

§. 23. Anmerkung. Die Subtraction und Division (§. 21.) sind folglich die einzig möglichen Arten der Verminderung der Zahlen (§. 17.).

§. 24. Anmerkung. Aus dem Bisherigen ersieht man, wie aus der Natur und den möglichen Veränderungen der Zahlen die vier Rechnungsarten, oder die sogenannten vier Species der Rechenkunst; nämlich die Addition, Subtraction (§. 18.), Multiplication und Division (§. 21.) von selbst herfließen.

§. 25. Erklärung. Bey der Addition (§. 18.) wird eine Zahl durch mehrere ungleiche Zahlen vermehrt, und man findet aus den angegebenen eine einzige, welche so viele Einheiten hat, als alle zusammen. Die auf diese Art erhaltene Zahl heißt die Summe, und die einzeln gegebenen werden die zusummirenden oder zuaddirenden Zahlen genannt.

§. 26. Anmerkung. Wenn man die Zahlen zwey, vier und sieben addiren sollte, so wäre die Summe (§. 25.) eine Zahl von dreyzehn, und die zusummirenden Zahlen hießen zwey, vier und sieben.

§. 27 Grundsätze. I. Die zu addirenden Zahlen

müssen gleichartig seyn (§. 7.), denn aus ihnen soll eine neue Zahl, die Summe (§. 25.), entstehen.

II. Da die Summe so groß ist, als alle zu addirende Zahlen zusammengenommen (§. 25.), so können diese für jene, und jene kann für diese gesetzt werden.

III. Weil die Größe der Summe einzig von der Größe der zusummirenden Zahlen abhängt, so ist es vollkommen einerley, in welcher Ordnung die gegebenen Zahlen zusammengesetzt werden, wenn sie nur alle in die Summe kommen.

§. 28. Erklärung. In der Multiplication (§. 18.) wird eine gegebene Zahl mehrmal zu sich selbst gesetzt, woraus denn wieder eine andere Zahl entsteht. Die gegebene, welche mehrmal zu sich selbst gesetzt wird, heißt der Multiplicand; die Zahl, welche anzeigt, wie oft dieses geschehen soll, wird Multiplicator, und die dritte, welche aus dieser Zusammensetzung entspringt, das Product oder Factum genennt. Auch werden Multiplicator und Multiplicand mit dem gemeinschaftlichen Namen Factoren bezeichnet.

§. 29. Anmerkung. Man soll die Zahl vier z. B. dreymal zu sich selbst setzen, so entsteht hieraus eine neue Zahl zwölf. Die gegebenen Zahlen vier und drey sind die beyden Factoren; insbesondere aber ist vier der Multiplicand, weil diese vier mehrmal zu sich selbst gesetzt wird, und drey der Multiplicator, weil diese drey anzeigt, daß die vier gerade dreymal zu sich selbst gesetzt werden soll. Die zwölf, welche auf diese Art entsteht, ist das Product oder Factum (§. 28.).

§. 30. Grundsätze. I. Die Multiplication ist ihrer Natur nach nichts anders, als eine Addition, d. h. eine Zusammensetzung einer und der nämlichen Zahl

zu sich selbst, und das Product nichts anders, als die Summe aus mehreren gleichen Zahlen.

II. Der Multiplicand ist so oft in dem Producte enthalten, als die Einheit (§. 7.) in dem Multiplicator. Denn für jede Einheit des Multiplicators wird der Multiplicand einmal in das Product gesetzt. (§. 28).

III. Für eine jede Einheit in dem Multiplicator kömmt der ganze Multiplicand einmal ins Product (II). Nun besteht aber der Multiplicand aus allen seinen Einheiten (§. 7.); folglich kommen auch alle Einheiten des Multiplicanden so oft in das Product, als wie viele Einheiten der Multiplicator enthält (§. 11.). Allein die Summe aller Einheiten im Multiplicator macht den Multiplicator selbst aus (§. 7.). Daher kömmt auch der ganze Multiplicator so oft in das Product, als der Multiplicand die Einheit enthält.

IV. Soll man z. B. sechs mit vier multipliciren, d. h. die Zahl sechs viermal nehmen, so wird eben hierdurch auch die Zahl vier sechsmal genommen (III); folglich ist sechsmal vier soviel als viermal sechs, d. h. einerley Factoren geben, auch mit verkehrter Ordnung, einerley Factum, und es ist in Rücksicht des Productes einerley, welchen von zwey Factoren man als Multiplicand, und welchen man als Multiplicator ansehen will.

§. 31. Erklärung. Bey der Subtraction (§.21). nimmt man eine kleinere Zahl von einer größern einmal hinweg (§. 12.) und erfährt so, was noch für ein Theil der größern übrig bleibt. Von den beyden gegebenen Zahlen heißt eine die größere, wovon der Abzug geschieht, die andere die kleinere oder Subtrahend, welche abgezogen wird; beyde zusammen heißen die

Posten, und der übrig bleibende Theil der größern wird der Ueberrest, Ueberschuß, Rest, oder die Differenz genennt.

§. 32. Anmerkung. Wenn man von der Zahl zwölf eine andere acht hinwegnehmen soll, so sind zwölf und acht die Posten; zwölf heißt die größere, acht die kleinere Zahl, und die Zahl vier, welche nach dem Abzuge übrig bleibt, wird der Rest genennt (§. 31.). — Der Fall, in welchem eine größere Zahl von einer kleinern abgezogen werden soll, gehört noch nicht hierher.

§. 33. Grundsätze. I. Die Posten müssen gleichartige Zahlen seyn (§. 5.). Denn die Einheiten, woraus die größere Zahl besteht, müssen es seyn (§. 9.) und die kleinere Zahl kann als ein Theil der größern angesehen werden.

II. Der Rest und die kleinere Zahl zusammen addirt (§. 25.) sind so groß, wie die größere. Denn der Rest zeigt an, um wie viele Einheiten die größere Zahl größer als die kleinere ist (§. 31.). Folglich muß dieser Ueberschuß zu der kleinern gesetzt, die größere wieder hervorbringen. So ist in §. 32. acht und vier wieder soviel als zwölf. Hierauf beruhet das, was man die Probe der Subtraction nennt. Wenn man nämlich von einer gegebenen Zahl eine kleinere abgezogen hat, und nun der Rest, zu dieser kleinern wieder addirt, die größere hervorbringt, so ist, wenn in dieser Addition selbst kein Rechnungsfehler liegt, die Subtraction richtig.

III. Der Rest von der größern Zahl abgezogen, läßt auch die kleinere übrig. Denn der Rest und die kleinere Zahl sind die beyden Theile, woraus die größere Zahl zusammengesetzt ist II. Wenn nun ein Theil vom Ganzen hinweggenommen wird, so muß wohl der andere

übrig bleiben. In §. 32. bleibt daher acht übrig, wenn man von der zwölf die vier hinwegnimmt.

IV. Wenn man daher überhaupt eine Summe hat, welche aus zwey Zahlen besteht, und nun die eine von diesen beyden Zahlen aus der Summe wegnimmt, so muß die andere übrig bleiben. Die zwey Zahlen fünf und sieben geben zur Summe die Zahl zwölf. Zieht man nun von der zwölf die sieben ab, so muß fünf übrig bleiben, und nimmt man die fünf von ihr hinweg, so erhält man die sieben zum Reste. Hierauf gründet sich die sogenannte Probe der Addition durch die Subtraction.

V. Die Addition (§. 18.) und die Subtraction (§. 21.) sind einander entgegengesetzt. Wenn man daher zu einer Zahl irgend eine andere addirt, und nun eben diese wieder von der Summe subtrahirt, so hat die erste Zahl gar keine Veränderung erlitten.

§. 34. Erklärung. Bey der Division wird eine gegebene kleinere Zahl von einer größern so oft abgezogen, als es geschehen kann. (§. 21.). Die kleinere Zahl, welche mehrmal abgezogen wird, heißt der Divisor oder Theiler; die größere, wovon sie hinweggenommen wird, der Dividend; und jene Zahl, welche anzeigt wie oft dieser Abzug geschehen kann, wird der Quotient genennt.

§. 35. Anmerkung. Sollte die Zahl zwanzig durch die vier dividirt werden, so würde man bestimmen müssen, wie oft diese von jener hinweggenommen werden kann. Dieses Hinwegnehmen hat nun gerade fünfmal Statt. Daher ist hier vier der Divisor, zwanzig der Dividend und fünf der Quotient.

§. 36. Grundsätze. I. Wie oft der Divisor vom Quotienten hinweggenommen werden kann, so oft kömmt

eine Einheit in den Quotienten (§. 34.). Folglich steckt der Divisor so oft in dem Dividenden, als die Einheit in dem Quotienten.

II. Ein Product aus dem Quotienten in den Divisor gibt den Dividenden. Denn nun wird für jede Einheit des Quotienten der Divisor wieder einmal gesetzt (§. 30.), und der Dividend muß hieraus entstehen. In §. 35. war vier in zwanzig fünfmal enthalten. Folglich muß auch nothwendig zwanzig aus fünfmal vier zusammengesetzt, d. h. fünfmal vier muß zwanzig seyn.

III. Der Quotient, in den Dividenden dividirt, gibt den Divisor. Denn, wenn dieses nicht geschehen sollte, so müßte entweder eine größere oder eine kleinere Zahl als der Divisor zum neuen Quotienten herauskommen. In diesen beyden Fällen würde aber ein Product aus ihr in den ersten Divisor einen andern Dividenden, als den gegebenen hervorbringen, welches doch nicht geschehen kann, da einerley Factoren auch einerley Factum geben müssen (§. 30. IV.). Im §. 35. kann man also auch fünf als Divisor und vier als den Quotienten betrachten; d. h. wenn vier in zwanzig fünfmal enthalten ist, so muß auch fünf in zwanzig viermal enthalten seyn.

IV. Wenn daher ein Product, welches aus zwey Factoren besteht, durch den einen Factor dividirt wird, so muß der andere Factor nothwendig als Quotient herauskommen. So gibt z. B. die Zahl zwanzig, als Product aus viermal fünf, durch vier dividirt, fünf; und, durch fünf dividirt, vier zum Quotienten.

V. Die Multiplication und Division dienen einander gegenseitig zu Proben. Der Satz in II. dieses §. ist die Probe für die Division, und der in IV jene für

die Multiplication. — Bey diesen Proben wird immer zum voraus gesetzt, daß bey der Proberechnung selbst kein Fehler mehr gemacht werde; weil, in dem Falle wo dieses geschieht, die Probe unzuverläßig ist.

VI. Die Multiplication (§. 18.) und die Division (§. 21.) sind einander entgegengesetzt. Wenn man daher eine Zahl mit irgend einer andern multiplicirt, und dann dieses Product durch die nämliche Zahl wieder dividirt, so hat die erste Zahl gar keine Veränderung erlitten.

Zweyte Abtheilung.

Von den ganzen Zahlen.

§. 37. Willkührlicher Satz. Die Zahlen sind Mengen von Einheiten (§. 7.). Um dieselbe in Rücksicht ihrer Größe von einander zu unterscheiden, bezeichnet man sie in jeder Sprache mit besondern Namen. Die Einheit, für sich selbst betrachtet, nennt man Eins; kömmt hierzu noch eine andere Einheit, so heißt man es eine Zahl von zwey Einheiten, oder, mit einem Worte, Zwey; zu dieser noch eine neue gesetzt, heißt Drey; dieser wieder eine beygesetzt, gibt Vier; zu vier eine, ist Fünf; zu fünf eine, Sechs; zu sechs eine, Sieben; zu sieben eine, Acht; zu acht eine, Neun, und zu neun eine, giebt Zehn, u. s. w. nach den bekannten Zahlen, welche mit Eilf, Zwölf, Dreyzehn, Vierzehn, Fünfzehn, Sechzehn, Siebenzehn, Achtzehn, und Neunzehn benennt werden, und deren folgende jedesmal durch Zusetzung einer neuen Einheit zur vorhergehenden entsteht. Weil

nun alle größere Zahlen, welche aus diesen kleinern durch Zusetzung neuer Einheiten hervorgehen, entweder ein Mehrfaches von zehn Einheiten, oder die Summe aus einem Mehrfachen von Zehn und einer Zahl die kleiner ist als zehn, seyn müssen, so hat man, der Bequemlichkeit wegen, besondere Namen angenommen, um diese Verschiedenheit zu bezeichnen. Man nennt daher eine Zahl von zweymal zehn mit einem Worte Zwanzig; dreymal zehn, Dreyßig; viermal zehn, Vierzig; fünfmal zehn Fünfzig; sechsmal zehn, Sechzig; siebenmal zehn, Siebenzig; achtmal zehn, Achtzig; neunmal zehn, Neunzig, und zehnmal zehn, Hundert. Ferner heißt man zehnmal hundert, Tausend; tausendmal tausend eine Million; millionmal Million, eine Billion; millionmal Billion, eine Trillion; millionmal Trillion, eine Quadrillion; millionmal Quadrillion, eine Quintrillion u. s. w.

§. 38. Erklärung. Man nennt die Zahl von zehn Einheiten einen Zehner; ferner zehn Zehner einen Hundertter; zehn Hunderter einen Tausendter u. s. f. so entstehen hieraus (nach §. 37.) immer neue Zahlen, welche zehnmal größer, als die unmittelbar vorhergehenden sind. Man heißt sie höhere Ordnungen und sagt, die Zehner sind von der ersten Ordnung, die Hundertter von der zweyten, die Tausendter von der dritten Ordnung, u. s. w.

§. 39 Zusatz. Eine Einheit von der höhern Ordnung (§. 38.) ist zehnmal größer, als eine Einheit von der nächstniedrigern Ordnung; und umgekehrt ist eine Einheit von der niedrigern Ordnung zehnmal kleiner, als eine Einheit von der nächsthöhern.

§. 40. Anmerkung. Dieses Gesetz, (§. 38.) bis auf zehn zu zählen und hier immer wieder eine neue, zehnmal größere Einheit anzunehmen, hat keineswegs in der Natur der Sache, sondern lediglich in einem Einverständnisse der Menschen seinen Grund. Man hätte eben sowohl eine größere oder kleinere Menge von Einheiten für die Einheiten der höhern Ordnungen (§. 38.) annehmen können. Der berühmte Leibnitz gab durch seine Arithmetica dyadica den Beweis hiervon, worin derselbe nur auf zwey zählet, und durch die beyden Zeichen 1 und 0 alle Zahlen anschreiben und aussprechen lehrt. — Auch verdient hier noch das zwölftheilige System (Duodecimalsystem) bemerkt zu werden.

§. 41. Willkührlicher Satz. Wenn man die einfachen Zahlen von Eins bis Neun (§. 37.) in ihrer natürlichen Ordnung durch die bekannten, überall angenommenen, arabischen Zeichen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, welche man Ziffer nennt, ausdrückt, so wird man hierdurch (nach §. 37.) alle mögliche Zahlen bezeichnen können, wenn man nur weiß, auf was für Einheiten (§. 38.) sie sich beziehen; d. h. wenn man ein Kennzeichen hat, welches bestimmt, von welcher Ordnung (§. 38.) dieselbe sind. Dieses Kennzeichen sey nun die Stelle, worin sich eines der obigen neun Zeichen in Bezug auf das andere befindet, welches neben ihm steht. Man nehme an, eine Ziffer, welche einer andern unmittelbar zur Linken steht, habe vermöge ihrer Stelle einen zehnfach höhern Werth, oder sey von einer nächsthöhern Ordnung (§. 38.), so kann man auf diese Art durch die nebeneinander stehenden Ziffer einer Zahl die Ordnung einer jeden, und durch den Werth der Ziffer selbst auch die Menge der vorhandenen Einheiten in dieser Ordnung angeben, und folglich die Größe der ganzen Zahl bestimmen. (§. 37.) Sind von einer der unmittelbar aufeinander folgenden Ordnungen

keine Einheiten in der Zahl vorhanden, so wird, an die Stelle, wo diese Ordnung stehen sollte, das Zeichen der Nulle (0) gesetzt, um hierdurch den noch folgenden Ziffern der Zahl nichts von ihrem Werthe zu benehmen.

§. 42. Anmerkung. Zur Erläuterung des Gesagten bemerke man Folgendes. Man denke sich eine der obigen neun Ziffer, z. B. die 6, so zeigt diese, an und für sich, eine Menge von sechs Einheiten an. Allein hieraus ist noch nicht ersichtlich, ob diese Einheiten sich auf bloße Einer, auf Zehner, auf Hundertter, oder ob sie sich auf eine höhere Ordnung (§. 38) beziehen. Setzt man aber neben diese 6 zur Linken eine andere Ziffer, z. B. eine 8, so bedeutet diese 8 nun 8 Einheiten von der ersten Ordnung, oder 8 Zehner (§. 38.) und die Zahl 86 ist soviel, als 8 Zehner und 6 Einer, oder, wie man es durch Worte ausspricht, sechs und achtzig. Kömmt neben diese 8 zur Linken noch eine 5, so gehört diese 5 nun zur zweyten Ordnung, d. h. zu den Hundertten, und die ganze Zahl 586 ist soviel, als fünfhundert sechs und achtzig. Wird noch eine 7 neben die 5 gesetzt, so wird die Zahl 7586 soviel, als siebentausend, fünfhundert sechs und achtzig. — Wäre die gegebene Zahl diese 809, so steht die 8 in der dritten Stelle, oder ist von der zweyten Ordnung, und die Nulle zeigt an, daß keine Einheiten von der ersten Ordnung vorhanden sind. Daher heißt die Zahl achthundert und neun.

§. 43. Aufgabe. Eine durch Ziffer geschriebene Zahl mit Worten auszusprechen.

Auflösung.

I. Man theile die gegebene Zahl von der rechten gegen die linke Hand in Gefache ein, gebe jeden Gefache drey Ziffer, und bemerke diese Gefache durch kleine Striche, welche man, nach dem Muster der folgenden Beyspiele, unten an die Ziffer setzt.

II. Die Stelle der Millionen (§. 37.) bemerke man mit einem Puncte über der Ziffer, welche die Einer

von Millionen anzeigt. Eben so die Billionen mit zwey, die Trillionen mit drey Puncten, u. s. w.

III. Nun fange man bey der höchsten Stelle der ganzen Zahl an, spreche jedesmal alle einzelne Ziffer aus, bis mit auf diejenige, welche mit einem oder mehreren Puncten bezeichnet ist, und setze nun das Wort bey, welches sich (nach II.) auf diese Puncte bezieht. Auf solche Art gehe man bis zur niedrigsten Stelle der Zahl fort.

IV. Sind Nullen in der Zahl, so werden diejenige Stellen, worin sie sich befinden, in dem Aussprechen übergangen.

Beweis. Die Richtigkeit dieser Auflösung beruht unmittelbar auf den willkührlichen Sätzen von §. 37. bis §. 42.

Beyspiele.

I. Man soll die Zahl 87423956 aussprechen.

Theilt man dieselbe, nach Vorschrift der Auflösung, in Klassen, und bezeichnet jene einzelne Ziffer mit ihrem besondern Namen so bekömmt man dieses

8	7,	4	2	3,	9	5	6
Zehner von Million.	Einer von Million	Hunderter von Tausend	Zehner von Tausend	Einer von Tausend	Hunderter	Zehner	Einer

Man spricht daher: Sieben und achtzig Millionen, viermal hundert drey und zwanzig Tausend, neun hundert sechs und fünfzig.

II. Die Zahl 3487591283274653 abgetheilt, stehet so:

3, 4 8 7, 5 9 1, 2 8 3, 2 7 4, 6 5 3

3	Tausender von Billionen
4	Hunderter von Billionen.
8	Zehner von Billionen
7	Einer von Billionen
5	Hunderttausender von Millionen
9	Zehntausender von Millionen
1	Tausender von Millionen
2	Hunderter von Millionen
8	Zehner von Millionen
3	Einer von Millionen
2	Hunderter von Tausend
7	Zehner von Tausend
4	Einer von Tausend
6	Hunderter
5	Zehner
3	Einer

Folglich mit Worten: Dreytausend vier hundert siebenundachtzig Billionen, fünfmal hundert ein und neunzig tausend, zwey hundert drey und achtzig Millionen, zweymal hundert vier und siebenzig tausend, sechshundert drey und fünfzig.

III. Die Zahl 8076000893005000832004 abgetheilt, gibt

8,076,000,893,005,000,832,004

Oder: Acht tausend sechs und siebenzig Trillionen, achthundert drey und neunzig Billionen, fünftausend Millionen, achtmalhundert, zwey und dreißig tausendund vier.

§. 44. Aufgabe. Eine durch Worte gegebene Zahl in Ziffer auszudrücken.

Auflösung. Man drücke (nach §. 37. und §. 42.) eine jede Menge der gegebenen Einheiten durch

eine ihr gebührende Ziffer aus, und setze sie in die gehörige Stelle, wobey man diejenige mit Nullen ausfüllen muß, in welchen keine Einheiten gegeben sind. Da wir die Ordnungen von Einern bis Hunderttausend, sowohl in bloßen Einern, als auch in Millionen, Billionen, Trillionen u. s. w. haben, so kann man die Ziffer nicht eher ordentlich schreiben, bis dieselbe zuerst alle genennt sind.

Beweis. Die Richtigkeit dieses Verfahrens beruhet wieder auf den willkührlichen Sätzen von §. 37. — §. 42.

Beyspiele.

I. Um eine Million, sechshundert drey und achtzig tausend, fünf hundert drey und zwanzig anzuschreiben, müssen alle Ordnungen von Millionen bis zu den Einern mit Ziffern besetzt werden, weil in allen diesen aufeinander folgenden Ordnungen Ziffer vorhanden sind. Daher ist diese Zahl eigentlich 1 Million, 6 hunderttausend, 80 Tausend, 5 hundert, 20 und 3, oder soviel als 1,683,523.

II. In folgender Zahl: Acht hundert und drey Millionen, dreyßig tausend und neun, fehlet zwischen den Hundertten und Einern von Millionen die Ordnung der Zehner von Millionen, daher muß diese Stelle mit einer Nulle ausgefüllt werden. Nun kommen nach den Einern von Millionen sogleich die Zehntausende; es fehlen daher die Hunterttausende, und es muß wieder eine Nulle eingeschoben werden. Endlich sind nach den Zehntausendten sogleich die Einer genennt, und folglich drey Ordnungen übergangen worden, welche wieder mit

drey Nullen ausgefüllt werden müssen, und die Zahl steht nunmehr so 803,030,009

§. 45. Anmerkung. Zur Erläuterung der obigen Beyspiele dient Folgendes: Man drücke alle gegebene Einheiten der verschiedenen Ordnungen einzeln aus, und bringe sie nachher in eine einzige Zahl, so wird die anzuschreibende daraus entstehen. Die Zahl in §. 44. I. wäre diese.

1000000 oder eine Million
600000 oder 6 hunderttausend
80000 oder 80 tausend
3000 oder 3 Tausend
500 oder 5 hundert
20 oder zwanzig
3 oder drey, folglich

Die Zahl 1,683,523.

Die dortige Zahl in II. wäre diese

800000000 oder 8 hundert tausend Millionen
3000000 oder 3 Millionen
30000 oder 30 tausend
9 oder neun, daher ist

803,030,009 die verlangte Zahl.

Nebst den angegebenen Regeln ist die Uebung das beste Mittel für Anfänger, um sich, sowohl im Aussprechen als Anschreiben der Zahlen, die nöthige Fertigkeit zu erwerben.

I. Die Addition.

§. 46. Aufgabe. Mehrere gegebene Zahlen zusammen in eine Summe zu bringen.

Auflösung.

I. Man schreibe die einzeln gegebenen Zahlen dergestalt untereinander, daß alle Einer, alle Zehner und

so alle folgende höhere Ordnungen derselben untereinander kommen, und ziehe einen Strich.

II. Man zähle alle Einer der zu addirenden Zahlen zusammen, so beträgt ihre Summe entweder selbst wieder einen Einer, oder sie macht einen Einer und einen Zehner, oder sie gibt einen oder einige Zehner ohne Einer oder noch mit einigen Einern.

III. Im ersten Falle setze man den gefundenen Einer unter die Reihe der Einer. Im zweyten hingegen schreibe man den Einer hin, nehme aber den mit ihm verbundenen Zehner zur Reihe der Zehner der gegebenen Zahlen, und mache nun die Summe aller Zehner. Im dritten Falle setze man in die Stelle der Einer eine Nulle oder die nebst den Zehnern vorhandenen Einer, und nehme wieder die erhaltenen Zehner zu den folgenden.

IV. Hier ist nun diese Summe aus den Zehnern entweder allein ein Zehner, und nun kömmt er unter die Reihe der Zehner; oder sie ist ein Zehner und ein Hundertter, und jetzt kömmt der Zehner unter die Zehner, und den Hunderter nimmt man zur folgenden Ordnung der Hundertter hinüber. Beträgt aber diese Summe aus Zehnern einen oder mehrere Hundertter ohne Zehner, so kömmt in die Stelle der Zehner eine Nulle, und die Hunderter werden zur folgenden Ordnung hinüber gezählt.

V. Auf diese Art verfahre man mit jeder folgenden Ordnung, und setze immer dasjenige, was aus der Summe der in ihr gegebenen Ziffer in die nächsthöhere kömmt, in dieselbe, und dieses so lange, bis man zur höchsten Stelle der größten der gegebenen Zahlen gekommen ist.

Beweis. Die Vorschrift I. gründet sich auf §. 27, I.; die folgenden beruhen theils auf eben diesem

Satze, theils auf den willkührlichen Sätzen von §. 37. — §. 42. Denn die Summe aus mehreren gegebenen Zahlen besteht in der Summe aller ihrer einzelnen Theile. Nun sind aber die Ordnungen derselben ihre Theile, und durch die gegebene Auflösung kommen alle einzelne Ordnungen in eine Summe, folglich auch alle Theile der Zahlen d. h. die Zahlen selbst.

Beyspiele.

I. Man soll die Zahlen 17804, 374902, 4592, 80301, 387 zusammenaddiren. Zuerst setze man die gleichartigen Ziffer untereinander. Nämlich:

17804	zu addirende Zahlen.
374902	
4592	
80301	
387	
477986	Summe.

Diese Summe ist so entstanden. Die Summe aller Einer der gegebenen Zahlen beträgt 16. Nun ist aber 16 Einer soviel, als 1 Zehner und 6 Einer, daher kommen diese 6 Einer unter die erste Reihe, und den 1 Zehner nimmt man zu der ersten Ordnung hinüber, wo denn die untere Ziffer 8 in dieser Reihe, wegen des 1 Zehners, welchen man im Sinne behalten hat, nun als eine 9 angesehen werden muß. Die Summe aller vorhandenen Zehner ist 18, d. h. 8 Zehner und 1 Hundertter. Daher bleiben jene unter den Zehnern stehen, und dieser wird zu seiner gleichartigen Ordnung gezählt. Alle Hundertter betragen 29 oder 2 Tausendter, welche wieder zur fol-

genden Ordnung kommen, und 9 Hundertter, welche in die Stelle der Hundertter gesetzt werden müssen. Die Summe aller Tausendter ist nun 17 d. h. 1 Zehntausender und 7 einfache Tausender, welche letztere hingeschrieben werden, da der 1 Zehntausender zur nächsthöhern Ordnung kömmt, und mit den hier vorhandenen Ziffern 17 Zehntausender, oder 1 Hunderttausender, und 7 Zehntausender ausmacht. Diese 7 werden daher hingesetzt, und die 1 kommt hinüber, wo sie mit den gegebenen Ziffern eine Summe von 4 Hunderttausendern ausmacht.

II. Beyspiel.

74083 9702 847 908 8754	Zu addirende Zahlen.
24 17 31 21 7	Theilsummen aus den einzelnen Ordnungen.
94294	Hauptsumme.

Werden hier zuerst alle Einer in eine Summe gebracht, so bekömmt man 24, welche unter die Reihe der Einer geschrieben werden müßen, weil sie mit diesen von einerley Art sind. Auf eben diese Art beträgt die Summe der Zehner 17; und diese muß ebenfalls unter die Stelle der Zehner gesetzt werden. Fährt man nun so fort, die Summen aller einzelnen Ordnungen zu machen, so bekömmt man, wie es das Beyspiel zeigt, so viele einzelne oder Theilsummen, als wie viele Ordnungen die

größte der gegebenen Zahlen enthält. Werden nunmehr diese einzelne Theilsummen nach obiger Vorschrift in eine gebracht, so entsteht hieraus die Hauptsumme, welche allen einzelnen Zahlen zusammengenommen gleich seyn muß, da sie aus den Summen aller gleichnamigen Ordnungen der gegebenen zu addirenden Zahlen besteht.

§. 47. **Willkührlicher Satz.** Das Zeichen der Addition ist dieses +, welches zwischen die zu addirenden Zahlen gesetzt, und durch plus oder zu ausgedrückt wird. Z. B. 19 + 8 + 32 + 12, heißt: 19 zu 8 zu 32 zu 12, oder: diese vier Zahlen sollen in eine Summe gebracht werden. Diese ist 71, und um es zu bezeichnen, gebraucht man das Zeichen der Gleichheit =, welches zwischen die zu addirenden Zahlen, und ihre Summe gesetzt wird. Z. B. 19 + 8 + 32 + 12 = 71.

§. 48. **Anmerkung.** Wer eine Additionsaufgabe aufgelöst hat, und der Richtigkeit seiner Rechnung, wenigstens mit vieler Wahrscheinlichkeit, versichert seyn will, rechne jedesmal die Summe einer Reihe von oben herunter, und dann noch einmal von unten hinauf. Bekömmt man auf diese Art immer die nämliche Summe, so ist es nicht wohl zu vermuthen, daß in der Rechnung gefehlt worden sey. Uebrigens ist hier, so wie überhaupt bey allen arithmetischen Arbeiten, eine ungetheilte Aufmerksamkeit und öftere Uebung das sicherste Mittel, den Anfänger gegen das Einschleichen der Rechnungsfehler zu schützen.

II. Die Subtraction.

§. 49. **Aufgabe.** Eine kleinere Zahl von einer größern zu subtrahiren.

Auflösung.

I. Man schreibe die beyden gegebenen Zahlen so, daß die gleichartigen Stellen, d. h. die Ziffer von einerley

Ordnungen untereinander kommen, und ziehe einen Strich darunter.

II. Sind nun alle einzelne Ziffer der kleinen Zahl kleiner, als die gleichartigen der größern, so nehme man jene von diesen in Gedanken hinweg, und schreibe den jedesmaligen Rest zweyer gleichen Ordnungen unter den gezogenen Strich. Ist aber die abzuziehende Ziffer der andern, wovon der Abzug geschehen soll, gleich, so kömmt in die Stelle des Restes eine Nulle. (Siehe Beyspiel I.).

III. Tritt der Fall ein, daß eine größere Ziffer der kleinern Zahl von einer kleinern in der größern hinweggenommen werden soll, so gehe man zur Ziffer der nächsthöhern Ordnung in der größern Zahl, und nehme eine Einheit von ihr herüber, welches Einslehnen genennt, und durch ein Pünctchen an der höhern Ziffer bemerkt wird. Diese Einheit macht in der nächst niedrigern Ordnung zehn aus (§. 41.), und nun kann, wenn zu diesen Zehn die vorhandenen Einheiten der niedrigern Ordnung in Gedanken gesetzt werden, die größere Ziffer von diesem Ganzen abgezogen werden. Diese Regel vom Lehnen muß so oft befolgt werden, als der Fall eintritt, daß von einer kleinern Ziffer eine größere abgezogen werden soll. (Siehe Beyspiel II.).

IV. Sind in der größern Zahl mehrere aufeinanderfolgende Nullen, so soll man die Ziffer der kleinern Zahl entweder von der ersten dieser Nullen abziehen, oder sie soll von einer kleinern Ziffer in der größern Zahl, auf welche in höhern Ordnungen diese Nullen erst folgen, hinweggenommen werden. Im ersten Falle wird die Nulle der niedrigsten Ordnung eine 10, alle übergangene Nullen aber 9. Im zweyten werden alle im Lehnen übergangene Nullen 9, und die kleinere Ziffer, wovon man

eigentlich zuerst abziehen sollte, wird um 10 vermehrt. (Siehe Beysp. III.).

Beyspiele.

I.	895247865 Größere Zahl	oder die Posten.
	74235432 Kleinere Zahl	
	821012433 Rest oder Differenz.	
II.	583245821 Größere Zahl.	
	97823948 Kleinere Zahl.	
	485421873 Rest oder Differenz.	
III.	9700026003000 2 Größere Zahl.	
	874938297 8623 Kleinere Zahl.	
	88250877051379 Rest. —	

Beweis. Die Regel I. beruht auf §. 33. I. Die Vorschrift II. gründet sich auf den Satz: daß ein Ganzes von einem andern Ganzen hinweggenommen werde, wenn alle Theile des ersten von allen Theilen des letztern hinweggenommen werden. Eben hierauf, und auf dem willkührlichen Satze in §. 41. beruhet das Verfahren in III. Die Richtigkeit der Regel IV. gründet sich darauf. Im obigen III. Beyspiele soll man drey Einer von zwey abziehen, welches an und für sich unmöglich ist. Allein, da man durch die Subtraction nicht fodert, eine jede einzelne Ziffer der kleinern Zahl von jeder einzelnen Ziffer der andern hinwegzunehmen, so kömmt es hier nur auf den Unterschied der ganzen Zahlen, nicht aber auf jenen ihrer einzelnen Theile an. Man muß daher in der obigen größern Zahl bis in die Stelle der Zehntausenden gehen, weil in den Zwischenordnungen keine Ziffer gegeben sind. Man lehnt daher in der vierten Ordnung einen Einer von Zehntausenden, oder 10000.

Allein $10000 = 9000 + 900 + 90 + 10 = 9990 + 10$. Folglich werden die drey Nullen in obiger Zahl in drey 9 verwandelt, und die 10 kömmt, wie gewöhnlich, zu den zwey Einern und macht mit diesen zwölf aus, wovon die 3 abgezogen, noch 9 übrig läßt. Da nun diese Zergliederung eben so auf den andern Fall (von IV.) wo man über Nullen hinweglehnen muß, angewendet werden kann, so ist hierdurch die Allgemeinheit der obigen Vorschrift gerechtfertiget.

§. 50. Willkührlicher Satz. Das Zeichen der Subtraction ist ein kleiner Queerstrich, (—) welcher zwischen die beyden Posten gesetzt, und durch minus oder weniger ausgesprochen wird. Z. B. $20 - 12 = 8$, heißt 20 weniger 12 ist gleich 8. Eben so ist $19 - 13 = 6$; $1894 - 785 = 1109$; $70038 - 5786 = 64252$ u. s. w.

§. 51. Anmerkung. Die Addition und die Subtraction dienen einander gegenseitig zu Proben (§. 33, IV.).

Einige Beyspiele werden dieses erläutern.

I. Die zu addirenden Zahlen seyen A und B.

79854378	A
3979483	B
83833861	Summe.

Zieht man von dieser Summe die Zahl A ab, so bleibt die Zahl B übrig, nämlich:

83833861	Summe
79854378	A
3979483	Rest oder B.

Nimmt man hingegen von der Summe die Zahl B hinweg, so bekommt man zum Reste die Zahl A; z. B.

83833861 Summe
3979483 B
79854378 Rest oder A.

II. Für die Subtraction sey folgendes Beyspiel:

93758926 Größere Zahl.
8597858 Kleinere Zahl.
85161068 Rest.

Wird zu diesem Reste die kleinere Zahl addirt, so gibt diese Summe die größere, nämlich:

85161068 Rest.
8597858 Kleinere Zahl.
93758926 Größere Zahl.

III. Multiplication.

§. 52. Aufgabe. Alle Producte zu finden, welche entstehen, wenn man irgend zwey der einfachen Zahlen von 1 bis 9 miteinander multiplicirt.

Auflösung. Man schreibe die Zahlen von 1 bis 9 in die waagrechte Reihe A B. Nun setze man unter jede Ziffer ihr Doppeltes in die Gefache der Reihe C D; ferner ihr Dreyfaches, (welches entsteht, indem man die Ziffer in C D zu jenen in A B addirt) in die Reihe E F; nun das Vierfache, (welches man durch Summirung des Dreyfachen und Einfachen erhält), in die Gefache von G H, und fahre auf diese Art immer weiter fort, bis endlich in R S das Neunfache gesetzt wird, so ist die Aufgabe aufgelöst, indem unmittelbar aus der Verfertigung des Täfelchens schon folgt, daß alle Mehrfache von 1 bis 9 darin angetroffen werden müssen, da sie alle durch wiederholte Addition zusammengesetzt worden sind.

A	1	2	3	4	5	6	7	8	9	B
C	2	4	6	8	10	12	14	16	18	D
E	3	6	9	12	15	18	21	24	27	F
G	4	8	12	16	20	24	28	32	36	H
I	5	10	15	20	25	30	35	40	45	K
L	6	12	18	24	30	36	42	48	54	M
N	7	14	21	28	35	42	49	56	63	O
P	8	16	24	32	40	48	56	64	72	Q
R	9	18	27	36	45	54	63	72	81	S

§. 53. Anmerkung. Diese Sammlung aller Producte aus irgend zwey Ziffern der Zahlen von 1 bis 9 heißt auch das Pythagorische Täfelchen, oder das Einmaleins. Da nun, wie es die folgenden Sätze lehren werden, bey Auflösung der Multiplications-Aufgaben, diese Producte unentbehrlich sind, so müssen sich Anfänger um so mehr eine Fertigkeit in denselben verschaffen, als auf dem Auswendigwissen des Einmaleins die Leichtigkeit in dem Multipliciren und Dividiren größtentheils beruhet.

§. 54. Aufgabe. Eine gegebene Zahl mit einem Einer zu multipliciren.

Auflösung.

I. Man setze den Multiplicator unter die Stelle der Einer des Multiplicanden, und ziehe einen Strich. (Siehe die Beyspiele).

II. Man mache, nach dem Einmaleins, (§. 53.) ein Product aus dem Multiplicator in die Einer des Multiplicanden, und setze dasselbe mit seiner niedrigsten Stelle, (wenn es die Einer übersteiget) unter die Einer des Multiplicanden.

III. Man mache das Product aus dem Multipli-

cator in die Zehner des Multiplicanden, und schreibe es mit der niedrigsten Ziffer unter die Zehner des Multiplicanden.

IV. Eben so verfahre man mit allen höhern Ordnungen des Multiplicanden, so bekömmt man so viele einzelne untereinanderstehende Theilproducte, als aus wie vielen Ziffern der Multiplicand besteht.

V. Alle diese Theilfacta bringe man nun, wie gewöhnlich, in eine Summe, so ist diese das verlangte Product.

Beweis. Eine Zahl wird mit einer andern vermehrt, wenn alle einzelne Theile, woraus sie besteht, durch diese andere vermehrt werden. (§. 16.) Nun besteht aber ein gegebener Multiplicand aus den Ziffern aller Ordnungen von der höchsten bis zu den Einern, und durch die obige Vorschrift werden alle Ziffer desselben mit dem Multiplicator vermehrt, allen diesen Producten die gehörigen Stellen angewiesen, auch endlich alle diese einzelne Producte in eine Summe gebracht, folglich ist die Auflösung richtig.

Beyspiele.

I.	793 58642	Multiplicand.
	6	Multiplicator.
	12	Einer.
	24 .	Zehner.
	36 . .	Hundertter.
	48 . . .	Tausendter.
	30	Zehntausendter.
	18	Hunderttausendter.
	54	Einer von Millionen.
	42	Zehner von Millionen.
	476151852	Summe oder Product.

II. . . . 8170592 ⎫
8 ⎭ Factoren.

16 Einer.
72 . Zehner.
40 . . Hundertter.
0 . . . Tausendter.
56 . . . . Zehntausendter.
8 . . . . . Hunderttausender.
64 . . . . . . Einer von Millionen.

65364736 Summe oder Product.

§. 55. Anmerkung. Aus dieser Auflösung (§. 54.) entsteht eine Art die dortige Multiplication abzukürzen, welche denn auch, weil sie weniger Zeit kostet, an Statt jener immer gebraucht werden muß. Ein Beyspiel soll dieses erläutern. Wenn man die Zahl 498735 mit 9 multipliciren sollte, so setze man so:

498735 ⎫
9 ⎭ Factoren

4488615 Factum.

Nun fange man, wie gewöhnlich, bey den Einern des Multiplicanden an, und sage fünfmal neun Einer sind fünf und vierzig Einer, d. h. 4 Zehner und 5 Einer. Da nun die Einer nur unter Einer, und die Zehner unter Zehner stehen können, so schreibe man die 5 in die Stelle der Einer, und behalte die 4 zu dem folgenden Producte aus den Zehnern im Sinne. Nun gehe man in die Stelle der Zehner. Nämlich 9 mal 3 Zehner sind 27 Zehner; hierzu die 4 Zehner des vorigen ersten Productes gesetzt, gibt 31 Zehner, d. h. 1 Zehner und 3 Hundertter. Diesen 1 Zehner schreibe man nun wieder unter die Zehner des Multiplicanden, und behalte die 3 Hunderter im Sinne, um sie zu den Hunderten, welche aus der Multiplication der 7 in die 9 entstehen, zu setzen. — Auf

ähnliche Art fahre man nun immer in den höhern Ordnungen fort, und setze jedesmal zu dem Producte aus ihnen in den Multiplicator Dasjenige, was aus dem Factum der nächstniedrigern Stelle in diese höhere Ordnung gekommen ist, und dieses so lange, bis man die höchste Stelle des Multiplicanden durch den Multiplicator vermehret hat.

§. 56. Aufgabe. Eine Zahl, welche aus mehreren Ziffern besteht, durch eine andere, welche ebenfalls mehrere Ziffer enthält, zu multipliciren.

Auflösung.

I. Man setze die beyden Factoren mit ihren gleichnamigen Ordnungen untereinander, und ziehe einen Strich (Siehe die Beyspiele.).

II. Man multiplicire (nach §. 55.) alle Stellen des Multiplicanden durch den Einer des Multiplicators. Eben so auch

III. Alle Ziffer des Multiplicanden durch den Zehner, den Hundertter, den Tausender, u. s. f. durch alle folgende höher Ordnungen des Multiplicators, und setze nur jedes dieser einzelnen Producte eine Stelle weiter zur Linken, wie es die unteren Beyspiele zeigen, so bekömmt man so viele besondere Producte, als aus wie vielen Ziffern der Multiplicator besteht. Alle diese bringe man

IV. Sodann (nach §. 55.) in eine Summe, so ist diese das gesuchte Product. Sollten etwa

V. In dem Multiplicator mehrere Nullen enthalten seyn, so muß dasjenige Product, welches aus der nächstfolgenden Ziffer im Multiplicator mit dem Multiplicanden entsteht, um so viele Stellen zur Linken vorgerückt werden, als Nullen aufeinander folgen. (Siehe Beyspiel II.).

Beweis. Nach §. 30, II. muß der Multiplicand so oft genommen werden, als wie oft der Multiplicator die Einheit enthält. Nun besteht aber, nach der Voraussetzung, der Multiplicator aus mehreren Theilen, d. h. aus Ziffern von verschiedenen Ordnungen; folglich muß der Multiplicand mit allen diesen Ziffern vermehrt werden. Dies rechtfertiget die Regel II. nach §. 55. Die Richtigkeit von III. und IV. beruht darauf, daß das zweyte der Theilproducte zehnmal größer, als das erste; das dritte zehnmal größer, als das zweyte, u. s. f. jedes folgende zehnmal größer, als das unmittelbar vorhergegangene seyn muß. Eben hierauf gründet sich auch die Regel V. Folglich ist das Verfahren der ganzen Auflösung gerechfertiget.

Beyspiele.

I.

8763942	Factoren.	
5837		
61347594	Das 7 fache	einzelne Facta.
26291826	Das 30 fache	
70111536	Das 800 fache	
43819710	Das 5000 fache	
51155129454	Summe oder Hauptfactum.	

II.

9385276	Factoren.
3005	
46926380	Das 5 fache.
28155828	Das 3000 fache.
28202754380	Das 3005 fache oder verlangte Product.

§. 57. Aufgabe. Eine Zahl mit einer andern, woran mehrere Nullen hängen, zu multipliciren.

Auflösung. Man multiplicire die gegebene Zahl mit der andern, ohne auf die Nullen Rücksicht zu nehmen, wie gewöhnlich (nach §. 55, 56.) und hänge die vorhandenen Nullen an das entstandene Product.

Beweis. Man setze einmal, an dem Multiplicator seyen drey Nullen, so ist dieses (nach §. 41.) soviel, als seyen die andern Ziffer desselben mit 1000 multiplicirt. Wird also der Multiplicand ohne diese Nullen vermehrt, so wird das Product 1000 mal kleiner, als gefodert wird, und man muß, um es so groß zu machen, als es eigentlich seyn soll, an dasselbe die drey Nullen wieder anhängen. Eben dieses gilt auch von jeder andern Anzahl von Nullen an dem Multiplicator.

Beyspiel. Man soll 8736983 mit 48000 multipliciren, so setze man dieses auf folgende Art:

8736983	Factoren.
48000	
69895864	Theilfacta.
34947932	
419375184000	Product.

§. 58. Zusatz. Befinden sich sowohl an dem Multiplicanden, als an dem Multiplicator mehrere Nullen, so nehme man auf dieselbe im Anfange keine Rücksicht, multiplicire lediglich die beyden Zahlen miteinander, und hänge an das hieraus entstandene Product die Summe der Nullen von beyden Factoren. Wenn man z. B. 7848000 mit 9200 multipliciren sollte, so setze man

7848000 9200	}	Factoren.
15696 70632	}	Theilfacta.
72201600000		Product.

Denn indem man an Statt 7848000 nur 7848 als Multiplicand annimmt, setzt man einen Factor, welcher 1000mal kleiner ist, als er seyn sollte (§. 41.), und folglich wird auch das Product selbst 1000mal kleiner, als es werden müßte. Da man ferner für 9200 nur 92 als Multiplicator gebraucht, so muß das Factum aus dieser Ursache ebenfalls 100mal kleiner werden, als es eigentlich seyn sollte (§. 41.). Folglich wird das Product, ohne die abgehängten Nullen, 1000mal 100mal, d. h. 100000mal zu klein, und man muß es, um ihm seinen gehörigen Werth zu geben, wieder 100000mal größer machen, d. h. diese 5 Nullen müssen wieder angehängt werden.

§. 59. Willkührlicher Satz. Das Zeichen der Multiplication ist dieses ×, oder auch ein Punct, welcher zwischen die Factoren gesetzt wird. Z. B. 8 × 10 × 5 = 400 heißt so viel, als ein Product aus den Zahlen 8, 10 und 5 gibt die Zahl 400. — Sollen noch mehrere Zahlen, welche durch die Zeichen + und — verbunden sind, mit einer dritten multiplicirt werden, so werden alle einzelne Zahlen, worauf sich die Multiplication bezieht, durch eine Parenthese eingeschlossen. Z. B. (8 + 4 — 6). 3 ist soviel, als die Zahl, welche herauskömmt, indem man zu 8 die 4 addirt, von dieser Summe die 6 hinwegnimmt und diesen Rest nun mit 3 multiplicirt. Daher ist (8 + 4 — 6). 3 = (12 — 6).

3 = 6. 3 = 18. Ferner ist (7 − 3 + 9 + 5). 8 = (4 + 9 + 5). 8 = 18. 8 = 144. u. s. w.

IV. Division.

§. 60. Aufgabe. Eine Zahl, welche aus mehreren Ordnungen besteht, durch einen Einer zu dividiren.

Auflösung.

I. Man schreibe den Divisor zur Linken des gegebenen Dividenden, und sondere beyde durch einen Strich von einander ab. (Siehe die Beyspiele.)

II. Nunmehr vergleiche man die höchste Ziffer des Dividenden mit dem Divisor, so ist dieselbe entweder eben so groß, als der Divisor, oder sie ist größer oder kleiner. Im ersten Falle schreibe man eine 1 in den Quotienten, welcher immer zur Rechten des Dividenden gesetzt, und durch einen Strich von demselben getrennt wird. Im zweyten Falle untersuche man vermittelst des Einmaleins (§. 52.), wie oft der Divisor von dieser Ziffer abgezogen werden kann, und setze die Zahl, welche dieses anzeigt, ebenfalls in den Quotienten. In dem dritten Falle endlich nehme man die zweyte Ziffer des Dividenden noch zu der ersten hinzu, und bestimme nunmehr auch wieder, wie oft der Divisor in diesen beyden Ziffern enthalten ist, wodurch auch wieder der Quotient entsteht.

III. Man multiplicire nunmehr den nach II. gefundenen Quotienten mit dem Divisor, setze dieses Product, wenn es nur aus einer Ziffer besteht, unter die höchste; wenn es aber zwey Stellen enthält, unter die erste und zweyte Ziffer des Dividenden, und ziehe dasselbe von diesen Ziffern ab.

IV. Zu dem in III. etwa gebliebenen Reste nehme man die folgende nächstniedrigere Stelle des Dividenden herunter; untersuche, wie oft der Divisor hierin enthalten ist, schreibe die Ziffer, welche dieses anzeigt, in den Quotienten, multiplicire nun diese Stelle des Quotienten mit dem Divisor, ziehe dieses Product von dem gebliebenen Reste, und der heruntergenommenen Ziffer wieder ab; nehme von Neuem eine folgende Ziffer aus dem Dividenden, bestimme wieder einen neuen Theil des Quotienten, und fahre so lange mit dieser Arbeit fort, bis die letzte Ziffer des Dividenden herunter genommen worden ist.

V. Sollte es sich ereignen, daß in III. kein Rest geblieben, und die folgende vom Dividenden herunter genommene Ziffer kleiner, als der Divisor wäre, so muß man in den Quotienten eine Nulle setzen, hierauf die folgende Stelle des Dividenden herunter nehmen, und im übrigen den obigen Regeln folgen, um die folgenden Ziffern des Quotienten zu finden.

Beweis. Die Richtigkeit dieses Verfahrens wird sich am Faßlichsten an einem Beyspiele zeigen. Gesetzt also, die Zahl 83574 sollte durch 6 dividirt werden, so wird dieses gewiß geschehen, wenn alle Theile, woraus diese Zahl besteht, mit 6 getheilt werden. Nun besteht aber die obige Zahl aus ihren Ordnungen, oder $83574 = 80000 + 3000 + 500 + 70 + 4$, und es ist einerley, ob man diese Summe, oder die ganze Zahl 83574 selbst durch 6 dividirt. Man fange daher die Division bey der höchsten Stelle des Dividenden an, und sage: 6 in 80000 ist 10000mal enthalten; 6mal 10000 sind 60000, und diese 60000 von den 80000 abgezogen, lassen

20000 zum Reste übrig, in welchen der Divisor nicht mehr nach Zehntausendern, aber wohl nach niedrigern Ordnungen enthalten ist. Weil nun in dem Dividenden noch 3000 gegeben sind, so setze man dieselbe zu dem gebliebenen Reste von 20000, so gibt dieses eine Summe von 20000 + 3000 oder 23000. Diese nun wieder mit dem Divisor 6 getheilt, gibt 3000 zum zweyten Theile des Quotienten, welcher mit dem Divisor multiplicirt, 6 × 3000, oder 18000 gibt, und, von 23000 hinweggenommen, einen Rest von 5000 übrig läßt, worin der Divisor nun nicht mehr nach Tausendtern, wohl aber nach Hunderttern enthalten ist. Allein, in dem Dividenden sind noch 500 gegeben, folglich muß man dieselbe zu dem gebliebenen Reste setzen, und diese Summe 5500 von Neuem durch 6 dividiren. Dies gibt 900 zum dritten Theile des Quotienten. Das Product aus ihm in den Divisor wird 5400, und zum Reste bleiben 100, in welchem der Divisor nicht nach Hunderttern, sondern nach Zehnern enthalten seyn kann. Aber, im Dividenden sind noch 70 gegeben. Man setze sie also wieder zu dem gebliebenen Reste, und dividire die Summe 170 von neuem durch 6, so erhält man 20 zu dem folgenden Theile des Quotienten, welcher, mit 6 multiplicirt, 120, und zum Reste wieder 50 gibt, der den Divisor nur nach Einern in sich fassen kann. Kommen daher die im Dividenden vorhandenen 4 Einer dazu, so entsteht 54 zur Summe, welche den Divisor gerade 9mal, ohne ferneren Rest, enthält. Folglich wird 9 der letzte Theil des Quotienten. — Nach diesem Verfahren war nunmehr der Divisor 10000mal, 3000mal, 900mal und 9mal, d. h. 13929mal im Dividenden enthalten. Daher ist diese Zahl 13929

der gesuchte Quotient, welches nachstehende Rechnung, im Vergleich mit dem eben Gesagten, um so deutlicher machen wird.

Divisor. Dividend.
6|83574|
6|80000| 10000 I. Theil des Quotienten.
60000
addirt. { 20000 1ter Rest.
3000 II. Theil des Dividenden.
6|23000| 3000 II. Theil des Quotienten.
18000
addirt. { 5000 2ter Rest.
500 III. Theil des Dividenden.
6|5500| 900 III. Theil des Quotienten.
5400
addirt. { 100 3ter Rest.
70 IV. Theil des Dividenden.
6|170| 20 IV. Theil des Quotienten.
120
addirt. { 50 4ter Rest.
4 V. Theil des Dividenden.
6|54| 9 V. Theil des Quotienten.
54
00

Werden nun in diesem Beyspiele alle einzelne Theile des Quotienten zusammengesetzt, so findet man ihn = $10000 + 3000 + 900 + 20 + 9 = 13929$.

Aus dieser Darstellung ist ersichtlich, daß sich dieselbe nicht einzig auf das hier berechnete Beyspiel beschränkt, sondern daß sie auf alle andere Divisionsfälle, welche diesem ähnlich sind, sich anwenden läßt.

§. 61. Zusatz. Wenn der Divisor aus zwey Ziffern besteht, so vergleiche man die beyden höchsten Stellen des Dividenden mit ihm. Sind sie ihm gleich, so kömmt in die höchste Stelle des Quotienten eine Eins. Ist der Divisor kleiner, so nehme man einstweilen zu dem Quotienten eine Ziffer, welche, nach dem Einmaleins, der Quotient aus der höchsten Ziffer des Divisors in die höchste des Dividenden ist. Mit dieser multiplicire man den ganzen Divisor, so wird, wenn das Product von den beyden höchsten Stellen des Dividenden abgezogen werden kann, der angenommene Quotient der richtige seyn. Ist aber dieses Product größer, als daß man es wirklich abziehen könnte, so muß man den Quotienten um eine Einheit so lange vermindern, bis dieser Abzug wirklich geschehen kann. — Ist aber der Divisor größer, als die beyden höchsten Stellen des Dividenden, so nehme man aus dem Dividenden drey Stellen, vergleiche nunmehr den Divisor mit denselben, und bestimme nach dem Obigen den Quotienten. Um die folgenden Ziffer des Quotienten zu finden, verfahre man ganz nach den Regeln des vorigen §. und der so eben gegebenen Vorschrift.

Nachstehende Beyspiele werden dieses erläutern.

I. Divisor. Dividend. Quotient.

```
8|94,6952|118369
  8 . . . . .
  ---------
  14 . . . .
   8 . . . .
  ---------
   66 . . .
   64 . . .
  ---------
    29 . .
    24 . .
  ---------
     55 .
     48
  ---------
      72
      72
  ---------
      00
```

II. Divisor. Dividend. Quotient.

```
12|52,5384|43782
   48. . . . .
  ---------
    45 . . .
    36 . . .
  ---------
     93 . .
     84 . .
  ---------
      98 .
      96 .
  ---------
       24
       24
  ---------
       00
```

III. Divisor. Dividend. Quotient.

```
358|2662,90782| 743829
    2506 .....
    ----
     1569 ....
     1432 ....
     ----
      1370 ...
      1074 ...
      ----
       2967 ..
       2864 ..
       ----
        1038 .
         716 .
        ----
        3222
        3222
        ----
        0000
```

§. 62. Anmerkung. Sollten Fälle vorkommen, wo der Divisor eine aus 4, 5, 6, oder mehreren Ziffern bestehende Zahl ist; wo es also nicht so leicht in die Augen fällt, wie oft derselbe in irgend einem Theile des Dividenden enthalten seyn wird, so ist es sehr rathsam, sich zuvor in einem Täfelchen alle Vielfache des Divisors von 1 bis 9 zu verfertigen. Hierdurch geht man bey der Division immer sicher zu Werke, indem man von diesen vielfachen Producten immer nur jene zu suchen braucht, welche die höchsten sind, die von den jedesmaligen Ziffern des Dividenden abgezogen werden können. Auch erspart man sich hierdurch die Mühe, manche Producte doppelt zu machen, welche entweder zu groß, oder zu klein angenommen wurden; ein Fall, welcher Anfängern, ehe sie gehörige Uebung in Divisionsarbeiten haben, nur zu oft widerfährt. Z. B. die Zahl 9876831249 3 soll durch 38572 dividirt werden, so setze man dieses wie gewöhnlich, und schreibe unter den Divisor alle Mehrfache desselben bis mit auf das Neunfache. Nämlich:

	Divis.	Divid.	Quot.
1 faches	38572	98768.312493	2560622
2 ——	77144	77144	2 faches
3 ——	115716	216243	
4 ——	154288	192860	5 faches
5 ——	192860	233831	
6 ——	231432	231432	6 faches
7 ——	270004	23992	
8 ——	308576	0	0 faches
9 ——	347148	239924	
		231432	6 faches
		84929	
		77144	2 faches
		77853	
		77144	2 faches
		709 Rest.	

Dieser Rest heißt soviel, als diese übrig gebliebene Zahl 709 soll, als ein Theil des ganzen Dividenden, noch durch den Divisor 38572 getheilt werden. Daß der hieraus entstehende Quotient kleiner als 1 seyn müsse, erhellet hieraus. Man denke sich eine Menge von 38572 Dingen, welche unter eine Anzahl von 38572 Personen ausgetheilt werden sollen, so ist klar, daß jede Person eines dieser Dinge bekommen werde. Wären hingegen eben so viele Dinge unter mehrere Menschen, oder weniger Dinge unter eben so viele Menschen auszutheilen, so wird wohl jeder derselben weniger als ein Ding bekommen, d. h. der Quotient wird weniger als Eins, oder kleiner als Eins seyn müssen. Man sagt, daß der Quotient in diesem Falle ein Bruch sey; ein Wort, welches erst unten seine volle Erklärung bekommen wird.

§. 63. Willkührlicher Satz. Das Zeichen der Division ist ein Doppelpunct, (:) der zwischen den Dividenden, welcher vorhergeht, und den Divisor, welcher nachfolgt, gesetzt wird. Z. B. 48 : 12 = 4;

144 : 24 = 6; 2648 : 4 = 662. Eine andere Art, die Division zu bezeichnen, wird unten vorkommen.

§. 64. Anmerkung. Die Multiplication und die Division dienen einander wechselseitig zu Proben (§. 36, V.) Wenn man z. B. 382597 durch 263 multiplicirt, so entsteht, nach den gewöhnlichen Regeln, folgende Rechnung:

```
 382597 ⎫ Factoren.
    263 ⎭
-------
1147791
2295582.
765194..
---------
100623011 Factum.
```

Wird nun dieses Product durch den Multiplicator dividirt, so gibt der Quotient den Multiplicanden; und umgekehrt wird der Multiplicator zum Quotienten herauskommen, wenn man das Factum durch den Multiplicanden dividirt. Dies zeigen folgende Rechnungen.

```
I.  263|1005,23011|382597
        789 .....
        ----
        2172 ....
        2104 ....
        ----
          683 ...
          526 ...
          ----
          1570 ..
          1315 ..
          ----
           2551 .
           2367 .
           ----
            1841
            1841
            ----
            0000
```

```
II. 382597|1006230,11|263
             765194 . .
            ---------
            2410361 .
            2295582 .
            ---------
             1147791
             1147791
             --------
                   0
```

Soll hingegen die Zahl 2157078 durch 46 dividirt werden, so ist die Rechnung diese:

```
46|215,7078|46893
   184 . . . .
   ---
    317 . . .
    276 . . .
    ---
     410 . .
     368 . .
     ---
      427 .
      414
      ---
       138
       138
       ---
         0
```

worin die Probe (nach §. 36, V.) so gemacht wird, daß ein Product aus dem Divisor in den Quotienten den Dividenden hervorbringen muß. Dies gibt Folgendes:

```
  46893 Quotient ⎫
     46 Divisor  ⎭ Factoren.
 ------
 281358
187572
-------
2157078 Factum oder Dividend.
```

§. 65. Anmerkung. Wenn der Divisor nur eine Ziffer ist, so kann man die Division auf kürzere Art so verrichten, daß man die Producte aus den verschiedenen Stellen des

Quotienten in den Divisor in Gedanken macht, dieselbe eben so von den gehörigen Ziffern des Dividenden hinwegnimmt, und so bis ans Ende, wie gewöhnlich, fortfährt. Z. B. Divisor. Dividend. Quotient.

6| 448992 | 74832.

Man sage: 6 in 44 geht 7mal; 6mal 7 sind 42, und diese von 44 abgezogen, lassen 2 übrig. Diese 2 neben die 8 gesetzt, gibt 28. Man sage nun wieder 6 in 28 geht 4mal; 4mal 6 sind 24 und diese von 28 hinweggenommen, lassen 4 übrig. u. s. w. bis zum Ende.

§. 66. Aufgabe. Eine gegebene Zahl durch eine Decimalzahl, d. h. durch eine 1, woran mehrere Nullen hängen, zu dividiren.

Auflösung. Man schneide von der Rechten gegen die Linke so viele Ziffer an dem Dividenden ab, als Nullen an dem Divisor sind, so geben die noch zur Linken stehenden nicht abgeschnittenen Ziffer des Dividenden den Quotienten, und die abgeschnittenen den zurückbleibenden Rest, wie in §. 62.

Beweis. Nach §. 41. ist jede Ziffer, welche einer andern zur Rechten steht, zehnmal kleiner vermöge ihrer Stelle. Nimmt man daher von einer Zahl die letzte Ziffer zur Rechten hinweg, so ist die unmittelbar zur Linken stehende, so wie jede der folgenden höhern, um eine Stelle weiter gegen die Rechte gerückt; folglich hat auch jede derselben einen zehnfach kleinern Werth bekommen, und die Zahl selbst ist zehnmal kleiner geworden (§. 16.) d. h. mit zehn dividirt. Hieraus erhellet ebenfalls, daß die gegebene Zahl hundertmal kleiner werden müsse, wenn man zur Rechten zwey Ziffer von ihr abschneidet. Und überhaupt ist klar, daß diese Zahl so vielmal zehnmal kleiner werden müsse, als wie viele Ziffer auf diese Art abgeschnitten werden.

Beyspiele. Die Zahl 879345: 100 = 8793, nebst einem Reste von 45, der noch durch den Divisor 100 (nach §. 62.) getheilt werden soll. Ferner ist 793238: 10000 = 79, nebst dem Reste 3238.

§. 67. Zusatz. Sind auch an dem Dividenden mehrere Nullen, so werden so viele von ihm ausgestrichen, als wie viele der Divisor an sich hat. Denn die Nullen des Dividenden vertreten, in Rücksicht des Werthes der noch folgenden Ordnungen in demselben, die Stelle von wirklichen Ziffern (§. 41.); folglich tritt auch hier der Beweis von §. 66. ein. Z. B. 87395000: 1000 = 87395. Oder 389000: 100 = 3890; oder 738000: 10000 = 738: 10 = 73, nebst 8 als Rest.

§. 68. Zusatz. Ist der Divisor keine Decimalzahl, aber doch eine solche, woran mehrere Nullen hängen, so schneide man an dem Dividenden so viele Ziffer von der Rechten zur Linken ab, als an dem Divisor Nullen hängen; dividire nun, wie gewöhnlich durch die Ziffer des Divisors den Dividenden, und setze die von dem Dividenden abgeschnittenen Ziffer neben den sich am Ende der Division etwa ergebenden Rest. Z. B.

```
12(00 | 94,837(25 | 7903
        84 . . .
        ---
         108 . .
         108 . .
         ---
            37
            36
            --
             1
```

Zu diesem Reste, die oben abgeschnittenen 25 gesetzt, gibt 125, welche man durch den Divisor 1200 eigentlich noch theilen soll.

Dritte Abtheilung.

Von den Decimalbrüchen.

§. 69. Erklärung. Unser zehntheiliges Zahlensystem beruht auf zwey willkührlichen Annahmen:

I. Man zähle auf zehn, und steige in den folgenden Ordnungen immer zum zehnfach Höheren empor. (§. 37. 38.)

II. Wenn mehrere Ziffer neben einander stehen, so hat jede, welche sich unmittelbar zur Linken der andern befindet, vermöge ihrer Stelle, einen zehnfach höhern, die unmittelbar zur Rechten stehende aber einen zehnfach kleineren Werth. (§. 41.)

Wenn man nun zur Rechten der Einer einer gegebenen Zahl eine Ziffer setzt, und dasselbige Gesetz gelten läßt, so hat diese Stelle einen zehnfach kleinern Werth als die Einer. Nun heißt aber der zehnte Theil von Eins ein Zehntel, folglich ist dieß die Stelle der Zehntel. Wird noch eine Ziffer zur Rechten dieser Zehntel gesetzt, so muß ihr Stellenwerth wiederum zehnmal kleiner werden. Nun ist aber der zehnte, Theil von einem Zehntel offenbar der hunderte Theil der Einheit, oder ein Hunderttel; daher ist diese neue Stelle jene der Hunderttel. Auf gleiche Weise entstehen die folgenden Stellen, welche die Namen: Tausendtel, Zehntausendtel,

Hunderttausendtel, Milliontel, u. s. f. erhalten. Solche Zahlen, welche zehnmal, hundertmal, tausendmal u. s. f. kleiner als Eins sind, heißen Decimalbrüche oder zehntheilige Brüche.

§. 70. Anmerkung. Dieses Entstehen und Benennen der Decimalbrüche kann nach folgendes Beyspiel aufklären.

4	8	7	5	1	2	9	6	4	3	8	7	5
Millionen.	Hunderttausende	Zehntausende	Tausende	Hunderte	Zehner	Einer	Zehntel	Hunderttel	Tausendtel	Zehntausendtel	Hunderttausendtel	Milliontel

§. 71. Willkührlicher Satz. I. Da bey mehreren neben einander stehenden Ziffern die Ordnungen der Decimalbruchstellen bestimmt sind, sobald man weiß, welche Ziffer sich auf die Einer bezieht, so bezeichne man diese Stelle der Einer mit einem daneben gesetzten Comma, welches der Einerstrich heißt. So ist

354,7384

soviel, als: dreyhundert vier und fünfzig Einer, sieben Zehntel, drey Hunderttel, acht Tausendtel und vier Zehntausendtel.

87,3005 ist soviel als: sieben und achtzig Einer, drey Zehntel (kein Hunderttel, kein Tausendtel) fünf Zehntausendtel

6,000004 heißt: sechs Einer, und vier Milliontel

II. Wenn nebst den Decimalbrüchen keine ganze Decimalzahlen gegeben sind, so schreibe man dahin, wo sonst die Einer ständen, eine Nulle, setze ihr zur Rechten den Einerstrich und lasse nun die Decimalbrüche folgen.

So heißt z. B.

0,643 soviel als: Keine Einer, sechs Zehntel, vier Hunderttel, drey Tausendtel. Ferner ist:

0,07 soviel als: sieben Hunderttel, u. s. f.

§. 72. Zusatz. I. Aus dem Bisherigen wird klar, daß 1 Zehner 10mal größer als 1, und 1 Zehntel 10mal kleiner als 1 ist. Desgleichen ist 1 Hunderter 100mal größer, 1 Hundertel aber 100mal kleiner als 1. ferner 1 Tausender 1000 mal größer, 1 Tausendtel aber 1000 mal kleiner als 1, u. s. f.

II. Gleichwie 10 Einer einen Zehner, 10 Zehner einen Hunderten, 10 Hunderte einen Tausenden u. s. f. bilden, so bilden auch 10 Tausendtel ein Hunderttel, 10 Hunderttel ein Zehntel, 10 Zehntel einen Einer.

III. Sowie ein Tausendter 10 Hunderte, ein Hunderter 10 Zehner, ein Zehner 10 Einer beträgt, so enthält auch ein Einer 10 Zehntel, ein Zehntel 10 Hundertel, ein Hunderttel 10 Tausendtel u. s. f.

IV. Umgekehrt ist 1 Tausendtel der 10te Theil von 1 Hunderttel, 1 Hundertel der 10te Theil von 1 Zehntel, 1 Zehntel der 10te Theil von 1 Einer, 1 Einer der 10te Theil von 1 Zehner, 1 Zehner der 10te Theil von 1 Hunderter u. f. f.

V. So wie z. B. der zehnte Theil vom Zehner oder der hunderte Theil vom Hunderter oder der Tausende Theil vom Tausenden u. s. f. einen Einer bilden, so betragen auch zehn Zehntel, oder hundert Hunderttel, oder tausend Tausendtel einen Einer.

VI. Auch bilden z. B. 100 Zehntel einen Zehner, 1000 Zehntel einen Hunderten, 10000 Zehntel einen

Tausenden u. s. f; ferner 100 Zehntausendtel ein Hunderttel; 1000 Hunderttel einen Zehner; 10000 Hunderttausendtel ein Zehntel; 10 Zehntausendtel einen Tausendtel, 100000 Hunderttel einen Tausenden u. s. f.

§. 73. Grundsatz. I. Da die Decimalbrüche Zahlen sind, weil sie Vielheiten der durch die Decimalbruchstellen bestimmten Einheiten enthalten, so haben auch die bekannten vier Rechnungsarten mit diesen zehntheiligen Brüchen Statt.

II. Da auch diese Brüche nach demselbigen Gesetze entstehen, nach welchem die ganzen Decimalzahlen gebildet werden, so treten bey diesen vier Fundamentalrechnungen auch im Allgemeinen die nämlichen Regeln ein, wie bey der Rechnung in ganzen Zahlen, und eben hierin wird sich der große Vorzug der Rechnung mit Decimalbrüchen vor jener in gemeinen Brüchen zeigen.

§. 74. Erklärung. Decimalbrüche heissen reine, wenn sie keine ganze Decimalzahlen, sondern nur Decimalbruchtheile enthalten; z. B. 0,684; 0,039; 0,0008; 0,7634. Gemischte Decimalbrüche aber sind jene, welche theils aus ganzen Decimalzahlen, theils aus solchen Bruchtheilen bestehen; z. B. 37,6423; 640,38; 17584,0064; 3,087 u. s. f.

§. 75. Aufgabe. Mehrere gegebene Decimalbrüche zusammen zu addiren.

Auflösung. I. Man setze die gegebenen Brüche so untereinander, daß die Stellen der Einer, welche entweder mit einer Ziffer oder mit einer Nulle ausgefüllt ist (§. 74.) in lothrechter Reihe stehen. Siehe die Beyspiele

II. Nachdem ein wagrechter Absönderungsstrich gezogen worden ist, fange man bey der niedrigsten Stelle die Addition so an, und führe sie gerade so von der Rechten zur Linken fort, als wenn es ganze Decimalzahlen wären (§. 46).

III. Schneidet man endlich an der hierdurch erhaltenen Zahl von der Rechten zur Linken so viele Ziffer ab, als jene aus den zu addirenden Zahlen Bruchstellen hat, welche aus den meisten besteht, so entsteht die verlangte Summe.

Beweis. Die Regel I. folgt aus dem Grundsatze, daß nur gleichartige Größen zusammen addirt werden können (§. 27 I) Die Regel II. fließt aus §. 73, II. und die Richtigkeit von III. erkennt man daher, daß die niedrigste Ziffer der Summe von derselbigen Art seyn muß, als von welcher die niedrigste Stelle jener der zu addirenden Zahlen ist, welche die meisten Decimalbruchstellen enthält.

Beyspiele.

I.

0,6281	zu addirende Brüche.
0,2317	
0,8598	Summe.

II.

0,8364621	zu addirende Brüche.
0,75823	
1,5946921	Summe.

III.

384,627	zu addir. Brüche.
72,03	
10,7234	
467,3804	Summe.

IV.	3,602	zu addir. Brüche.
	264,53102	
	0,64	
	13,0038	
	7,6	
	289,37682	Summe.

§. 76. Anmerkung. I. Daß in den Beyspielen II. III. und IV die zu addirenden Brüche nicht aus gleichvielen Decimalbruchstellen bestehen, darf dem Anfänger nicht auffallend seyn, da man zur Rechten dieser Decimalbruchstellen soviele Nullen setzen kann, als man will, ohne den Werth des Decimalbruchs zu verändern. So ist z. B. 17,643 = 17, 6430 = 17, 6430000 u. s. f. weil diese Nullen zur Rechten die Abwesenheit der folgenden Decimalbruchstellen in diesen Ordnungen andeuten.

II. Da aber 17,643 soviel heißt, als 17 Einer nebst 643 Tausendtel, so ist 17,6430 soviel, als 17 Einer und 6430 Zehntausendtel und 17,6430000 soviel, als 17 Einer nebst 6430000 Zehnmilliontel u. s. f. Das Beyspiel in IV wäre also folgendes

3,60200	zu addirende Brüche, welche durch das Anhängen der Nullen in Hunderttausendtel verwandelt worden sind.
264,53102	
0,64000	
13,00380	
7,60000	
289,37682	Summe.

§. 77. Aufgabe. Die Subtraction in Decimalbrüchen zu verrichten.

Auflösung. I. Wenn der kleinere Bruch, er sey ein reiner oder ein gemischter, soviele Decimalbruchstellen als der größere hat, so setze man ihn so unter diesen, daß die gleichartigen Stellen unter einander stehen, ziehe einen Strich, vollbringe die Subtraction gerade so,

als wenn es ganze Zahlen wären, und schneide nun von der Rechten zur Linken soviele Bruchstellen ab, als jede der beyden Zahlen hat. Siehe die Beyspiele I. II. und III.

II. Hat der kleinere Bruch weniger Bruchstellen als der größere, so setze man sie nach I. unter einander, schreibe die Ziffer, welche in dem größern Bruche mehr, als in dem kleinern sind, unverändert unter den gezogenen Querstrich und verfahre im Uebrigen nach I. Siehe Beyspiel IV. u. V.

III. Wenn in der kleinern Zahl mehr Bruchstellen als in der größern vorkommen, so schreibe man sie gehörig (nach I) unter einander, denke sich die in der größern Zahl noch fehlenden Stellen mit Nullen ausgefüllt, subtrahire so, als wären es ganze Zahlen und schneide in der Summe von der Rechten zur Linken so viele Stellen ab, als Bruchstellen in der kleinern Zahl sind. Siehe Beyspiel VI. u. VII.

IV. Soll ein reiner oder gemischter Decimalbruch von einer ganzen Zahl abgezogen werden, so denke man sich zur Rechten an die Zahl soviele Nullen, als der abzuziehende Bruch Decimalbruchstellen hat, subtrahire wie in ganzen Zahlen und bestimme das Comma nach der Zahl der Bruchstellen des Subtrahenden wie in III. Siehe Beyspiele VIII. IX. und X.

Beweis. Die Richtigkeit der I. Regel folgt theils aus §. 33, I, theils aus §. 73, II; die Regel II. fließt aus §. 76, so wie auch die Regeln III. und IV.

Beyspiele.

I.	0,8735	größerer Bruch.
	0,4213	kleinerer Bruch.
	0,4522	Rest.

II.	687,3496	
	49,1305	
	638,2191	Rest.

III. 74,30041
73,87965
0,42076 Rest.

IV. 0,8732654
0,39287
0,4803954 Rest.

V. 65,8725
9,76
56,1125 Rest.

VI. 0,7319000
0,2617825
Rest. 0,4701175.

VII. 39,70000
8,39862
Rest. 31,30138

VIII. 345,00000
0,78324
Rest. 344,21676

IX. 86,0000
34,8345
Rest. 51,1655

X. 1,00000
0,64329
0,35671 Rest.

§. 78. Anmerkung. Auch bey der Subtraction in Decimalbrüchen kann die Probe durch die Addition so gemacht werden, daß die Summe aus der kleinern Zahl und dem Reste der größern gleich seyn muß, (§. 33, II.) Die Ausführung dieser Proberechnungen ist Anfängern sehr zu empfehlen. Desgleichen kann auch die Subtraction zur Probe der Addition dienen. (§ 51)

§. 79. Lehrsatz. Wenn man die Ziffer eines reinen oder vermischten Decimalbruchs unverändert läßt, aber das Einer-Comma um einen Ziffer zur Rechten fortrückt, so ist der ganze Bruch hierdurch zehnmal größer d. h. mit 10 multiplicirt worden.

Beweis. Da das Einer-Comma in dem reinen Decimalbruche die Stelle bezeichnet, wo sich die Zehntel, Hunderttel, Tausendtel u. s. f. befinden, so ist klar, daß durch das Vorrücken dieses Strichs die vorigen Zehntel nun zu Einern, die vorigen Hundertel nun zu Zehnern, die vorigen Tausendtel nun zu Hunderttel werden u. s. f. wodurch jede Decimalbruchstelle einen zehn-

mal höheren Werth erhält; folglich auch der ganze Bruch, dessen Theile jene Bruchstellen sind.

Ist der Decimalbruch ein gemischter, so ist ebenfalls klar, daß die vorigen Einer nun zu Zehnern, die vorigen Zehner nun zu Hunderten u. s. f. alle folgende höhere Stellen zehnfach erhöht werden.

Beyspiele. Daher ist 0,764 × 10 = 7,64; ferner 0,0835 × 10 = 0,835; und 87,6304 × 10 = 876,304; auch 8,0006 × 10 = 80,006 u. s. f. Denn wenn man anstatt 0,764 so schreibt: 7,64 so sind die vorigen 7 Zehntel nun 7 Einer, die 6 Hunderttel nun 6 Zehntel und die 4 Tausendtel nunmehr 4 Hunderttel geworden, wodurch der ganze Bruch 7,64 offenbar zehnmal größer als 0,764 geworden ist.

§. 80. Zusatz. I. Wenn man also einen gegebenen Decimalbruch mit 10 multipliciren soll, so geschieht dieses, indem der Einer-Strich um eine Stelle von der Linken zur Rechten fortgerückt wird.

II. Eben so klar ist nun auch, daß man den zehntheiligen Bruch mit 100 multiplicirt, wenn der Einer-Strich um zwey Stellen zur Rechten fortschreitet. So ist z. B. 0,6874 × 100 = 68,74; ferner 16,832 × 100 = 1683,2; oder 0,00863 × 100 = 0,863; endlich 8,37 × 100 = 837 u. s. f.

III. Auf gleiche Weise wird auch 0,4387 × 1000 = 438,7; 73,85219 × 1000 = 73852,19; 0,346 × 1000 = 346; 0,73805 × 10000 = 7380,5 u. s. w.

IV. Dieß gibt überhaupt die Regel: Ein Decimalbruch wird mit 1, woran sich mehrere Nullen befinden (d. h. mit 10, 100, 1000, 10000, u. s. w.) multiplicirt, wenn man den Einer-Strich des Bruchs um soviele

Stellen zur Rechten fortrücken läßt, als wie viele Nullen sich an der 1 befinden.

V. Sind mehrere Nullen an der 1, als Bruchstellen an dem Bruche, so fällt der Einer-Strich ganz hinweg, und man muß jenen Ueberschuß von Nullen zur Rechten des Decimalbruches setzen. Denn es ist. z. B. $0,684 \times 10000 = 0,684 \times 1000 \times 10 = 684 \times 10$ (IV.) $= 6840$. Desgleichen wird $6,32 \times 100000 = 6,32 \times 100 \times 1000 = 632 \times 1000$ (IV) $= 632000$. Endlich $0,0005 \times 1000000 = 0,0005 \times 10000 \times 100 = 5 \times 100 = 500$ u. s. f.

§. 81. Aufgabe. Einen Decimalbruch mit einer ganzen Zahl, woran sich keine Nullen befinden, zu multipliciren.

Auflösung. Man setze den Multiplicator so unter den zu multiplicirenden Bruch, als wenn beyde Factoren ganze Zahlen wären, und, nachdem die Multiplication gerade so wie bey diesen Zahlen ist verrichtet worden, schneide man dem Producte von der Rechten zur Linken so viele Ziffer ab, als sich Decimalbruchstellen an dem Multiplicanden befinden. Siehe die Beyspiele.

Beweis Die Richtigkeit des Verfahrens beruht theils darauf, daß die Decimalbrüche nach dem zehntheiligen Gesetze gebildet sind; theils aber darauf, daß das Product in der niedrigsten Ziffer offenbar von der nämlichen Decimalstelle seyn muß, von welcher auch der Multiplicand in seiner niedrigsten Ordnung ist.

Beyspiele.

I.

0,38465	Factoren.
7	
2,69255	Product.

II.

0,864237	Factoren.
58	
6913896	
4321185	
50,125746	Product.

III.

34,6254
9
311,6286

IV.

51,00062
28
40800496
10200124
1428,01736

§. 82. Anmerkung. Hätte die ganze Zahl mehr Stellen, als der Decimalbruch, so schreibe man jene als Multiplicanden über diesen als Multiplicator, und verfahre wie vorhin (in §. 81). Denn einerley Factoren geben, auch in verkehrter Ordnung, einerley Product (§. 30. IV) z. B. $0,33 \times 8725 = 8725 \times 0,33$, welches folgende Rechnung gibt.

8725	Factoren.
0,33	
26175	Theilfacta.
26175	
2879,25	Product.

§. 83. Zusatz. Sollte man einen gegebenen Decimalbruch mit einer ganzen Zahl, woran sich eine Nulle oder mehrere Nullen befinden, multipliciren, so verfahre man in Rücksicht der ganzen Zahl nach §. 81 und 82; in Hinsicht der Nullen aber nach §. 79. u. 80.

Beyspiele.

I. 0,6432
840
25728
51456
540,288

denn $0,6432 \times 840$
$= 0,6432 \times 84 \times 10$
$= 54,0288 \times 10 = 540,288.$

II. 25,34
1300
7602
2534
32942

denn $25,34 \times 1300 \times 25,34 \times$
$13 \times 100 = 329,42 \times 100$
$= 32942.$

III. 8,532
70000
597240

denn $8,532 \times 70000 = 8,532$
$\times 7 \times 10000 = 59,724 \times 10000$
$= 597240.$

IV. $6,3 \times 425900 = 425900 = \times 6,3$, oder;
425 900
6,3
12777
25554
2683170

§. 34. Aufgabe. Einen gegebenen Decimalbruch mit einem gegebenen Decimalbruche zu multipliciren.

Auflösung. Man schreibe den aus den wenigsten Ziffern bestehenden Factor so unter den andern Factor, daß die niedrigsten Stellen beyder untereinander stehen, verrichte die Multiplication gerade so, wie in ganzen Zahlen, und schneide an dem Producte von der Rechten zur Linken so viele Stellen ab, als die Summe der De=

cimalstellen in beyden Factoren beträgt. Siehe die Beyspiele.

Beweis. Die Richtigkeit der Theilfacta und der Ziffer des Products folgt aus §. 73. — Daß aber auch die Stelle des Einer-Strichs die richtige sey, läßt sich sehr faßlich in einem Beyspiele zeigen. Es sey 0,348 mit 0,26 zu multipliciren, so besteht die niedrigste Stelle des Multiplicanden aus Tausendtel und jene des Multiplicators aus Hunderttel. Werden diese Stellen mit einander multiplicirt, so müßen in der niedrigsten Ziffer des Products nothwendig Hunderttausendtel erscheinen, da der hunderte Theil von dem tausendten Theile der Einheit natürlich der hunderttausendte Theil dieser Einheit ist. — Dieser Beweis kann auf alle andere Fälle angewendet werden.

Beyspiele.

```
I.      0,623   |  II.  0,32542
         0,48   |         0,213
        -----   |       -------
         4984   |         97626
        2492    |        32542
      -------   |       65084
Prod. 0,29904   |     ----------
                      0,06931446  Product.

III.   35,2782
           0,9
      --------
      31,75038  Product.

IV.   132,8324
        0,0053
     ---------
       3984972
      6641620
    ----------
    0,70401172  Product.
```

V. 8, 63 × 0, 000005
0, 00004315 Product.

VI. 43, 21
7, 38
34568
12963
30247
318, 8898 Product.

§. 85. Anmerkung. Wenn man das I. und II. Beyspiel des vorigen §. genauer betrachtet, so ergibt sich sogleich, daß jedes der dortigen Producte kleiner als jeder seiner Factoren ist. In ganzen Zahlen hat dieses niemals Statt. Allein da Decimalbrüche nur Theile der Einheit enthalten, so heißt: einen Decimalbruch mit einem andern multipliciren, soviel als von dem einen ein solches Stück nehmen, als der andere es anzeigt, wodurch nothwendig eine Verkleinerung im Producte entstehen muß.

§. 86 Anmerkung. Der Beweis von §. 84. kann auch noch auf folgende Art geführt werden. Wenn z. B. 0, 643 mit 0, 25 multiplicirt werden sollte, und man multiplicirte die ganze Zahl 643 mit der ganzen Zahl 25, so würde das Product 16075 (da jener Factor 1000mal, dieser aber 100mal zu groß ist) natürlich 100000mal zu groß werden. Daher muß man dasselbe, um ihm seine wahre Größe zu geben, wieder 100000mal kleiner machen, wodurch die 5 Einer zu 5 Hunderttausendtel werden, welches offenbar 0, 16075 zum richtigen Producte gibt.

§. 87. Lehrsatz. Wenn die Ziffer eines gegebenen reinen oder gemischten Decimalbruchs unverändert bleiben, der Einer-Strich aber um eine Stelle zur Linken gerückt wird, so ist der ganze Bruch hierdurch zehnmal kleiner, d. h. mit 10 dividirt worden.

Beweis. Denn durch dieses Verrücken des Ei-

nerstriches werden die Zehntel des gegebenen Bruchs zu Hunderttel, seine Hunderttel zu Tausendtel, seine Tausendtel zu Zehntausendtel. Enthält er aber auch noch Ganze, so werden dessen Einer zu Zehntel, seine Zehner zu Einer, seine Hunderte zu Zehner u. s. f. Der gegebene Bruch wird daher in allen seinen Theilen zehnmal kleiner, folglich auch im Ganzen.

Beyspiele. Demnach ist 0, 684 : 10 = 0, 0684; ferner 0, 034 : 10 = 0, 0034; auch 28, 67 : 10 = 2, 867; 314, 006 : 10 = 31, 4006 u. s. f. Denn wenn man statt 0, 684 den Bruch 0, 0684 setzt, so sind aus den vorigen 6 Zehntel nun 6 Hunderttel, aus den früheren 8 Hunderttel nun 8 Tausendtel und aus den 4 Tausendtel nun 4 Zehntausendtel geworden. Folglich ist der neue Bruch zehnmal kleiner als der gegebene.

§. 88. Zusatz. I. Um einen Decimalbruch mit 10 zu dividiren, darf man nur den Einer-Strich um eine Stelle zur Linken fortrücken.

II. Auch wird der gegebene Bruch mit 100 dividirt, wenn der Einer-Strich um zwey Stellen zur Linken fortschreitet. So ist z. B. 264, 382 : 100 = 2, 64382; 7, 3421 : 100 = 0, 073421; 87, 6 : 100 = 0, 876 u. s. f. Denn durch dieses Verrücken des Einer-Strichs wird jede Stelle hundertmal kleiner am Werthe.

III. Desgleichen ist 8734, 27 : 1000 = 8, 73427; 45, 03 : 10000 = 0, 004503; 0, 3 : 100000 = 0, 000003 u. s. f.

IV. Hieraus fließt im Allgemeinen die Regel: Um einen Decimalbruch mit einer 1, woran sich mehrere Nullen befinden, zu dividiren, rücke man den Einer-

Strich um so viele Stellen zur Linken, als wie viele Nullen die 1 bey sich hat.

§. 89. Aufgabe. Den Rest, welcher oft bey der Division in ganzen Zahlen (§. 62) entsteht, durch Decimalbruchtheile auszudrücken.

Auflösung. I. Man hänge zur Rechten des Restes eine Nulle und dividire mit dem Divisor hinein, so findet man die Zehntel des Quotienten, welche neben den Einer-Strich gesetzt werden. Das Product aus diesen Zehntel in den Divisor ist nun entweder dem mit einer Nulle versehenen Reste gleich, oder kleiner als derselbe. Im ersten Falle ist die Division vollkommen geschlossen; Siehe Beyspiel I.

II. Im zweyten Falle aber hänge man an den neuerdings bleibenden Rest abermals eine Nulle, dividire mit dem Divisor hinein, so erhält man die Hundertel des Quotienten. Auf solche Weise fahre man

III. nach I. u. II. so lange fort, bis sich die Division entweder einmal schließet, oder bis die gefundenen Decimalbruchtheile des Quotienten so klein geworden sind, daß man (für den Fall der Rechnung) keine kleinere mehr zu finden braucht. Siehe die Beyspiele.

Beweis. Der Rest, welcher bey gewöhnlichen Divisions-Aufgaben in ganzen Zahlen bleibt, besteht in seiner niedrigsten Stelle aus Einern. Durch das Anhängen der Nulle werden diese mit 10 multiplicirt (§ 57). Daher muß der Quotient aus dem Divisor in diesen zehnmal vergrößerten Dividenden auch wieder zehnmal kleiner werden, als die Einer sind. Folglich enthält dieser Quotient Zehntel. Hieraus fließet die Richtig-

keit der I. Regel. Die Regel II. und III. folgt aus demselbigen Grunde, und nachstehende Beyspiele werden sie noch mehr aufklären.

```
    Divis. Divid.  Quot.
I.     5 | 3827 ( 765,4
           35
           --
            32
            30
            --
             27
             25
             --
              20
              20
              --
              00
```

Hier bleiben 2 Einer zum Reste, in welchen der Divisor 5 nicht mehr nach Einern enthalten ist. Durch Anhängen der Nulle wird dieser Rest 10mal zu groß und man muß ihn, um ihm seinen gehörigen Werth zu geben, 10mal kleiner machen, wodurch 4 Zehntel entstehen. Daher ist 5 in 3827 siebenhundert fünf und sechzig, und vier Zehntel mal enthalten.

```
     Divis. Divid. Quotient.
II.   8 | 389   (48,625
          32
          --
           69
           64
           --
            50
            48
            --
             20
             16
             --
              40
              40
              --
              00
```

Hier hat sich die Division erst in den Tausendtel genau abgeschlossen.

```
III.  12 | 857  (71,4166 . . .
           84
           --
            17
            12
            --
             50
             48
             --
              20
              12
              --
               80
               72
               --
               80
               72
               --
                8
```

Hier geht der Quotient ins Unendliche fort, welches man durch die neben ihm stehenden Puncte bezeichnet. Auch kömmt in jede folgende Decimalbruchstelle die Ziffer 6. Wieviele von diesen Stellen man zu nehmen habe, hängt von dem Grade der Schärfe ab, womit der Quotient bestimmt werden soll. Wäre die Einheit z. B. ein Fuß, so ist der tausendte Theil schon so klein, daß er meist für unerheblich angesehen und deßhalb vernachläßigt werden kann.

§. 90. Zusatz. Es ist lehrreich, diese Decimalbruchstellen des Quotienten bey verschiedenen Divisoren (von 2 bis 9 z. B.) genauer kennen zu lernen. Hierzu dienen folgende Beyspiele:

I. 2 | 17 (8, 5 ohne Rest.

II. 3 | 28 | 9, 33 .... ins Unendliche, mit gleichen Ziffern.

```
   27
   ---
   10
    9
   ---
   10
```

III. 4 | 31 | 7, 75 ohne Rest.

```
   28
   ---
   30
   28
   ---
    20
    20
   ---
    00
```

IV. 5 | 651 | 130,2 ohne Rest.

```
  5
 15
 15
  10
```

V. 6 | 38 | 6,33 . . . . ins Unendliche, mit gleichen Ziffern.

```
 36
  20
  18
  20
```

VI. 7 | 22 | 3,1428571 . . . . . ins Unendliche, mit Wiederholung der sechs Ziffer 142857.

```
 21
  10
   7
   30
   28
    20
    14
     60
     56
      40
      35
       50
       49
        10
```

VII. 8 | 75 | 9,375 ohne Rest.

```
72
--
30
24
--
60
56
--
40
40
--
00
```

VIII. 9 | 32 | 3,55 .... ins Unendliche, mit Wiederholung der Ziffer 5.

```
27
--
50
45
--
50
45
--
50
```

Weil 2 in 10; 4 in 100; 5 in 10; 8 in 1000 ohne Rest aufgeht, so bricht auch die Division in I, III, IV, VII einmal ab. Da aber weder 3, noch 6, noch 7, noch 9, Factoren von 10, 100, 1000, 10000 u. s. f. ohne Rest sind, so geht in II, V, VI und VIII die Reihe der Decimalbruchstellen des Quotienten ins Unendliche fort.

§. 91. Anmerkung. Es ist bemerkenswerth, daß sich hier (d. h. in der Elementar-Arithmetik) schon eine Annäherung ins Unendliche zeiget, durch welche man das vorgesteckte Ziel niemals ganz genau erreichen kann. Anfängern ist zu rathen, daß sie diese Divisionen mit Divisoren über 9, z. B. mit 11, 12, 13 u. s. w. fortsetzen.

§. 92. Aufgabe. Einen gegebenen Decimalbruch durch eine ganze Zahl, welche weniger Ziffer als er selbst hat, zu dividiren.

Auflösung. I. Man dividire mit dem Divisor gerade so in den Decimalbruch, als wenn dieser auch eine ganze Zahl wäre, und setze die niedrigste Ziffer des Quotienten in jene Bruchstelle, welche mit der niedrigsten Ziffer des Dividenden einerley ist. Siehe Beyspiel I.

II. bleibt in I. noch ein Rest, so hänge man eine Nulle an, und bestimme sodann die folgenden Decimalstellen nach §. 89. Siehe die Beyspiele.

Beweis. Die Regel I. beruht darauf, daß durch das Theilen des ganzen Bruchs auch dessen niedrigste Stelle getheilt werden muß, wodurch die niedrigste Stelle des Quotienten die nämliche Ordnung erhält. Der Grund von Regel II. liegt in §. 89.

Beyspiele.

I. 15 | 0,36825 | 0,02455 ohne Rest.

```
    30
    ──
    68
    60
    ──
    82
    75
    ──
     75
     75
     ──
     00
```

```
II.  8 | 0,345 | 0,043125     ohne Rest.
         32
         ——
          25
          24
          ——
           10
            8
           ——
            20
            16
            ——
             40
             40
             ——
             00

III. 126 | 0,361 | 0,0020714 . . . . ohne Ende
           252
           ———
            900
            882
            ———
             180
             126
             ———
              540
              504
              ———
               36

IV.  5 | 38,025 | 7,605
        35
        ——
         30
         30
         ——
          25
          25
          ——
          00
```

§. 93. Zusatz. Wenn der Dividend weniger Ziffer als der Divisor enthält, so befolgt die Rechnung einen ähnlichen Gang. z. B.

```
I.  152|0,32|0,021 . . . . ohne Ende
           320
           304
           ---
            160
            152
            ---
              8

II. 246|0,09|0,00036 . . . ohne Ende.
           900
           738
          ----
           1620
           1476
           ----
            144

III. 25|1|0,04  ohne Rest
         100
         100
         ---
         000
```

§. 94. Aufgabe. Eine ganze Zahl durch einen Decimalbruch zu dividiren.

Auflösung. Man hänge zur Rechten an den Dividenden soviele Nullen, als wieviele Decimalbruchstellen der Divisor hat, und dividire nun, nach dem vorigen §. mit dem Decimalbruche, als wäre er in allen seinen Stellen eine ganze Zahl, in den mit Nullen versehenen Dividenden, so findet man den richtigen Quotienten.

Beweis. Die Richtigkeit des Verfahrens ergiebt sich am Faßlichsten aus einem Beyspiele. Wenn man z. B. 346 mit 0,82 dividiren soll, so wird der Quotient derselbe bleiben, wenn man sowohl den Divisor als den Dividenden mit der nämlichen dritten Zahl multiplicirt. Dieß folgt aus den Sätzen von der Division in Zahlen überhaupt. Daher ist 346 : 0,82 = 346 × 100 : 0,82 × 100 = 34600 : 82, welches folgende Rechnung gibt.

```
I. 82|34600|421,95 ... ohne Ende.
      328
      ---
       180
       164
       ---
        160
         82
        ---
         780
         738
         ---
          420
          410
          ---
           10
```

```
II. 46 : 13,581 = 46000 : 13581, oder
    13581|46000(3,46 ...   ohne Ende
          40743
          -----
           52570
           54324
           -----
            82460
            81486
            -----
              974
```

§. 95. Aufgabe. Einen Decimalbruch durch einen Decimalbruch zu dividiren.

Auflösung. Man rücke in dem Dividenden den Einer-Strich um so viele Ziffer zur Rechten fort, als wie viele Decimalbruchstellen sich in dem Divisor befinden (wobey man noch zuweilen an den Dividenden wird Nullen zu hängen haben) und dividire nun mit dem Divisor, als wäre er eine reine ganze Zahl, in den neuen Dividenden. (nach § 92, 93.)

Beweis. Da nach dieser Verfahrungsart Divisor und Dividend mit der nämlichen Zahl multiplicirt worden ist, so bleibt der Quotient unverändert. Das Uebrige der Auflösung beruht auf der Richtigkeit des §. 92 und 93.

Beyspiel.

```
I. 0,324 | 0,875   ist soviel als
     324 | 875 | 2,7006 . . .  ohne Ende.
           648
           ----
           2270
           2268
           ----
            2000
            1944
            ----
              56

II. 0,14 | 0,634   ist soviel als
      14 | 63,4 | 4,528 . . .  ohne Ende.
           56
           --
            74
            70
            --
             40
             28
             ---
             120
             112
             ---
               8
```

III. 0,254 | 0,3874 ist soviel als
2540 | 3874 | 1,525 .... ohne Ende.

```
2540
-----
13340
12700
-----
 6400
 5080
-----
 13200
 12700
-----
   500
```

IV. 3,14 | 0,6 heißt soviel als
314 | 600 | 0,19108 ... ohne Ende.

```
314
----
2860
2826
----
 340
 314
----
 2600
 2512
----
   88
```

V. 8,5 | 31,006 ist soviel als
8500 | 31006 | 3,64 ... ins Unendliche.

```
25500
-----
55060
51000
-----
 40600
 34000
-----
  6600
```

VI. 34,23 | 0,1 ist soviel als

```
3423 | 10 | 0,0029 ....  ohne Ende.
      10000
       6846
      -----
      31540
      30807
      -----
        733
```

§. 96. Anmerkung. Da sich die Multiplication und die Division gegenseitig zu Proben dienen, (§. 36. V) so können alle seitherige Multiplications-Beyspiele als Divisions-Uebungen; und alle Division Beyspiele als Multiplications-Uebungen benützt werden. Diese Rechnungen wirklich durchzuführen, ist den Anfängern sehr zu empfehlen.

§. 97. Anmerkung. Noch verdient hier die abgekürzte Multiplication und Division in Decimalbrüchen erklärt, und durch Beyspiele erläutert zu werden.

I. Abgekürzte Multiplication

Gesetzt man solle das Product aus 0,842365 × 0,249371 bilden, so wäre die gewöhnliche Rechnung diese:

```
      0,842365 ⎫ Factoren.
      0,249371 ⎭
  -------------
        842365 ⎫
       5896555 ⎪
      2527095  ⎬ Theilfacta.
     7581285   ⎪
    3369460    ⎪
   1684730     ⎭
  -------------
0,210061402415   Product.
```

Allein man kann die Multiplication auch mit der größten Ziffer des Multiplicators (hier mit 2) anfangen, und nach und nach mit den niedrigern Ziffern fortfahren, nach diesem Muster:

0,842365	M
0,249371	m
1 684730	A
336946	0 B
75812	85 C
2527	095 D
589	6555 E
8	42365 F
0,2100614	02415 P

Wollte man nun das Product nicht auf 12 Stellen finden, (was in den meisten Fällen wegen Kleinheit der letztern Bruchstellen nicht nöthig ist) so brauchte man jene Ziffer, welche zur Rechten des gezogenen Verticalstrichs stehen, weder zu berechnen, noch zu schreiben. Dieß geschieht dadurch, daß man (Siehe das untere Beyspiel) zuerst alle Ziffer von M mit der 2 in m multiplicirt, woraus A entsteht. Dann multiplicire man mit der 4 in m die 6 und alle höhere Stellen in M; mit der 9 in m die 3 und alles Höhere in M; mit der 3 in m die 2 und alles Höhere in M; mit der 7 in m die 4 und alles Uebrige in M; mit der 1 in m die 8 in M, und setze diese Producte in die Reihen A, B, C, D, E, F so entsteht aus ihrer Summe das Product P welches höchstens in seinen beyden niedrigsten Ziffern unrichtig ist.

0,842365	M	Factoren.
0,249371	m	
1 684730	A	abgekürzte Theilfacta.
336944	B	
75807	C	
2526	D	
588	E	
8	F	
0,2100603	P	abgekürztes Product.

Hier können die beyden letzten Ziffer (03) als unrichtige Stellen, hinwegelassen werden.

II. Abgekürzte Division.

Die abgekürzte Division in Decimalbrüchen besteht darin, daß man zuerst mit dem ganzen Divisor in den ganzen Dividenden, sodann mit dem um seine niedrigste Ziffer verminderten Divisor in den zweyten Theil des Dividenden; hierauf mit dem abermals um seine niedrigste Stelle verminderten Divisor in den dritten Theil des Dividenden dividirt, und damit bis zu Ende fortfährt. Zum Beyspiele diene das vorige Multiplications-Exempel:

Divisor.	Dividend.	Quotient.
0,249371	0,2100603	0,842365
	1994968	
	105635	
	99748	
	5887	
	4986	
	901	
	747	
	154	
	144	
	10	
	10	
	00	

§ 98. Anmerkung. Die Vortheile, welche diese Decimalbrüche in den Rechnungen gewähren, werden in der fünften Abtheilung, (von den gemeinen Brüchen) recht einleuchtend werden.

Vierte Abtheilung.

Von den benannten Zahlen.

§. 99 Erklärung. Der Werth einer Zahl hängt nicht allein von der Menge ihrer Einheiten, sondern zugleich auch von der Größe oder von dem Werthe der Einheiten selbst ab (§. 14.). Die Größe der Einheit aber ist willkührlich (§. 13.), und die im gemeinen Leben vorkommenden Geschäfte machen es nöthig, Einheiten von verschiedenem Werthe anzunehmen. Solche Zahlen nun, bey welchen nicht nur die Menge, sondern auch noch die durch willkührliche Annahme der Menschen festgesetzte Größe der Einheiten angegeben ist, heissen benannte Zahlen. Z. B. 3 Gulden; 18 Pfunde; 10 Meilen u. s. w.

§. 100. Anmerkung. Es ist klar, daß die Rechnung in benannten Zahlen im Wesentlichen keine neue Regeln erfodert. Das Einzige, was hierbey zu bemerken ist, besteht darin, daß man weiß, wie viele Einheiten einer niedrigern Klasse auf eine Einheit der höhern gehen. Dieses muß man sich aus besonders hierzu eingerichteten Büchern bekannt machen. Die folgende Tabelle, welche lediglich deshalb da steht, um die Anwendungen in den vier Rechnungsarten zu verstehen, zeigt ungefähr die in den Fällen des gemeinen Lebens am Meisten gebräuchlichen benannten Zahlen, welche Anfänger, um sich die nöthige Fertigkeit zu erwerben, auswendig lernen müssen.

§. 101. Tabelle

über einige im gemeinen Leben am Häufigsten vorkommende benannte Zahlen.

I. Gemeines Gewicht.

Ein Centner hat = = = = 100 Pfunde.
Ein Pfund = = = = 32 Lothe
Ein Loth = = = = 4 Quentchen.

II. Teutsches Apothekergewicht.

Ein Pfund ℔ hat = = = 12 Unzen.
Eine Unze ℥ = = = = 8 Drachmen.
oder = 24 Lothe.
Ein Drachma ʒ = = = 3 Scrupel.
Ein Scrupel ℈ = = = 20 Gran

III. Geldsorten.

Ein N. Louisd'or (Carolin) enthält = 11 Gulden
Ein Gulden = = = = = 60 Kreuzer
Ein Kreuzer = = = = = 4 Pfennige.

IV. Zeiteintheilung.

Ein Jahr besteht aus = = = 12 Monaten.
Ein Monat = 28 od. 29 od. 30 od. 31 Tagen.
Ein Tag = = = = = 24 Stunden.
Eine Stunde = = = = = 60 Minuten.
Eine Minute = = = = = 60 Secunden

V. Gem. Längenmaaß.

Eine deutsche Meile hat = = 24000 Rh. Sch.
Ein Rh. Schuh = = = = 12 Zolle.
Ein Zoll = = = = = 12 Linien.

VI. Papiermaaß.

Ein Ballen hat = = = = = 10 Rieß
Ein Rieß = = = = = = 20 Buch
Ein Buch (Schreibpr.) = = = 24 Bogen
Ein Buch (Druckpr.) = = = = 25 Bogen

§. 102. **Aufgabe.** Benannte Zahlen zu addiren.

I. Man setze die gegebenen einzelnen Zahlen so, daß jene, welche von der nämlichen Art sind, d. h. welche mit einerley Namen benennt werden, in einer Reihe untereinander und zwar so stehen, daß die gleichnamigen Ordnungen in ihnen auch untereinander kommen, und ziehe einen Strich. (§. 27. I.) (Siehe die Beyspiele.)

II. Man bringe alle Einheiten der niedrigsten Art in eine Summe, und untersuche durch die Division mit der **Reductionszahl** d. h. mit einer Zahl, welche nach §. 100 anzeigt, wie viele Einheiten dieser niedrigsten Gattung auf eine der nächsthöhern gehen, in diese Summe, wie oft dieser Divisor hierin enthalten ist. Den Rest aus dieser Division, oder, wenn keiner bleibt, eine Nulle, setze man in die Stelle der Einheiten der niedrigsten Ordnung.

III. Den Quotienten aus dieser Division (II.) behalte man im Sinne, und zähle ihn mit zu den gegebenen Zahlen der nächsthöhern Gattung. Die hieraus entspringende Summe theile man

IV. Aufs Neue mit einer Zahl, welche bestimmt, wie viele Einheiten dieser niedrigern Ordnung auf eine Einheit der unmittelbar höhern gehen, schreibe den Rest aus dieser Division, oder, wenn keiner übrig bleibt, wieder eine Nulle in diese Stelle, zähle den erhaltenen Quotienten nach (III.) aufs Neue zu den Zahlen der nächsthöhern Ordnung, und fahre nach diesen Regeln so lange fort, bis man zur höchsten Stelle gekommen ist, wo denn die sich ergebende Summe, ohne fernere Reduction, hingeschrieben werden muß.

Beweis. Die Richtigkeit dieses ganzen Verfahrens beruhet offenbar theils auf den §§. 99 — 101., theils auf der Natur der benannten Zahlen.

Beyspiele.

I.

Centner.	Pfunde.	Lothe.	Quentchen.
178	85	18	3
4793	37	25	2
508	23	12	3
89	79	28	1
5570	26	21	1

II.

Jahre.	Monate.	Tage.	Stunden.	Min.	Sec.
137	10	28	18	37	58
85	9	18	23	45	38
206	11	0	16	36	25
430	7	18	11	0	1

Zur Erläuterung des ersten Beyspiels Folgendes. Wenn man alle gegebene Quentchen summirt, so bekömmt man eine Summe von 9. Nun besteht aber nach §. 101. ein Loth aus vier Quentchen. Folglich müssen diese 9 durch 4 dividirt werden, um die darin enthaltenen Lothe zu finden. Der Quotient gibt 2 Lothe, und 1 Quentchen bleibt zum Reste, der in die Reihe der Quentchen geschrieben wird. Die 2 Lothe hingegen werden zu den folgenden Lothen gezählt, mit welchen sie eine Summe von 85 Lothen bilden. Nun sind aber wieder (nach §. 101.) in einem Pfunde 32 Lothe enthalten, folglich müs-

sen diese 85 Lothe durch 32 dividirt werden. Der Quotient gibt 2 Pfunde, welche man zur folgenden Reihe der Pfunde zählt, und zum Reste 21 Lothe, welche unter den Lothen stehen bleiben. u. s. w.

§. 103. Aufgabe. Mehrere gegebene benannte Zahlen von einander zu subtrahiren.

Auflösung. I. Man schreibe die gegebenen Zahlen so, daß die größere oben, die kleinere unten stehe, und wieder die gleichnamigen Einheiten untereinander kommen, (wie in §. 100.); und ziehe einen Strich. (Siehe die Beyspiele.)

II. Sind nun alle einzelne Zahlen in der abzuziehenden kleiner, als alle gleichnamige der andern, wovon der Abzug geschehen soll, so nehme man eine jede derselben von der über ihr stehenden hinweg, und setze den jedesmaligen Rest unter den Strich. (Siehe Beysp. I.)

III. Tritt hingegen der Fall ein, daß eine größere Zahl von einer kleinern weggenommen werden soll, so entlehne man eine Einheit bey der nächsthöhern Gattung, verwandle diese (nach §. 101.) in Einheiten der nächstkleinern Ordnung, setze die von dieser Ordnung vorhandenen Einheiten dazu, ziehe nun die Zahl des Subtrahenden hievon ab, und schreibe den gefundenen Rest in seine gebührende Stelle.

IV. Bey den folgenden Stellen verfahre man eben so, und bemerke nur, daß jene Zahl, bey welcher eins gelehnt worden ist, eben hierdurch auch um eine Einheit verringert wurde.

Beweis. Auch diese Vorschrift gründet sich theils auf die Regeln der Subtraction der unbenannten Zah-

len, theils auf den willkührlichen Werth, welchen man den benannten Zahlen (nach §. 101.) beylegt.

Beyspiele.

I.

Gulden.	Kreuzer.	Pfennige.
7893	23	2 Gr. Zahl.
965	18	1 Kl. Zahl.
6928	5	1 Rest.

II.

Centner.	Pfunde.	Lothe.	Quentchen.
1884	85	18	1
958	94	23	3
925	90	26	2

Erläuterung über II.

Von 1 Quentchen können keine 3 weggenommen werden. Daher nimmt man ein Loth herüber, welches mit diesem 1 Quentchen nunmehr 5 Quentchen ausmacht. Hievon nun die 3 abgezogen, bleiben 2 Quentchen übrig. Nun sollen 23 Lothe von 17 Lothen subtrahirt werden, welches wieder, an und für sich, unmöglich ist. Man nimmt daher 1 Pfund, welches 32 Lothe beträgt, herüber, so machen diese 32 Lothe, nebst den vorhandenen 17 eine Summe von 49, wovon nun die 23 Lothe abgezogen werden können. u. s. w.

§. 104. Anmerkung. Die Probe über die Addition und Subtraction kann hier eben so, wie bey den unbenannten Zahlen (§. 51.) gemacht werden, welches eine Uebung für die Anfänger ist, um sich eine Fertigkeit in diesen Rechnungen zu verschaffen.

§. 105. Anmerkung. Um von der Addition und Subtraction in benannten Zahlen einige practische Anwendungen zu zeigen, sollen folgende Beyspiele aufgelöst werden.

I. Additionsbeyspiele.

1.) Gustav Adolph (König von Schweden) wurde am 9ten December des Jahrs 1594 geboren, und erreichte ein Alter von 37 Jahren 10 Monaten und 28 Tagen. An welchem Datum ist er gestorben.

Offenbar müssen hier die zwey gegebenen Zeiten addirt werden, welches folgende Rechnung gibt.

Jahre		Monate		Tage	
1593	:	11	:	8	
37	:	10	:	28	
1630	:	21	:	36	Summe.

Um diese Summe auf den gehörigen Datum des Kalenders zurückzuführen, bedenke man, daß die erhaltenen 21 Monate 1 Jahr und 9 Monate betragen. Gustav Adolph ist demnach im J. 1631 nach 9 Monaten und 36 Tagen gestorben. Nun ist aber der 9te Monat der September, und der October hat 31 Tage. Folglich mußte nach 9 Monaten und 31 + 5 Tagen der 5te November verflossen gewesen seyn, und Gustav Adolph ist am 6ten November des Jahrs 1632 gestorben, weil die 10 Monate und 5 Tage nach dem Jahre 1631, folglich in das Jahr 1632 fallen.

2.) Es hat Jemand am 11 Januar des Jahrs 1782 Geld geliehen, welches nach Ablauf von 3 Jahren, 4 Monaten und 24 Tagen zurückgezahlt worden ist. Auf welchen Datum fiel die Rückzahlung? die Rechnung ist hier diese:

Jahre		Monate		Tage	
1781	;	0	;	10	
3	;	4	;	24	
1784	;	4	;	34	Summe

Die Zahlung wurde also nach dem Jahre 1784, nach dem 4ten Monate (April) nach 34 Tagen; folglich, da der May 31 Tage hat, nach dem 3ten Junius; folglich am 4ten Junius des Jahrs 1785 geleistet.

II Subtractionsbeyspiele.

1.) Es ist Jemand i. J. 1770 auf den 11ten März des Abends um 8 Uhr gestorben, und wurde geboren i. J. 1701 den 8ten Februar Morgens um 7 Uhr. Man sucht das Alter des Verstorbenen.

Aus der Natur der Sache sieht man sogleich, daß man von dem Datum des Absterbens jenen der Geburt abziehen müsse, um das Alter zufinden. Dies gibt folgende Rechnung.

Jahre	Monate	Tage	Stunden
1769	2	10	20
1700	1	7	7
69	1	3	13

Der Verstorbene ist daher 69 Jahre, 1 Monat, 3 Tage und 13 Stunden alt gewesen.

2.) Es hat Jemand an dem 11ten Januar des Jahrs 1782 eine Summe Geldes geliehen, und dieselbe wieder am 4ten Junius 1785 zurückgezahlt. Wie lange hatte er dieses Geld benützt?

Offenbar muß hier vom spätern Datum der frühere abgezogen werden. Dies gibt

Jahre	Monate	Tage
1784	5	3
1781	0	10
3	4	24

Hier sollten 10 Tage von 3 Tagen abgezogen werden, was nicht möglich ist. Daher müßen vom 5ten Monate, d. h. vom May, der 31 Tage hat, diese 31 Tage geborgt werden u. s. w.

Die geliehene Geldsumme wurde daher 3 Jahre, 4 Monate und 24 Tage vom Empfänger benützt.

Da die Addition und Subtraction sich wechselseitig zu Proben dienen, so können aus vorstehenden vier Beyspielen noch vier andere Fragen gebildet und aufgelöset werden, welche Uebung sehr zu empfehlen ist.

§. 106. Aufgabe. Benannte Zahlen von verschiedenen Wertharten mit einer gegebenen unbenannten Zahl zu multipliciren.

Auflösung. I. Man multiplicire die niedrigste der gegebenen benannten Zahlen mit dem Multiplicator, untersuche durch die Division (nach §. 102, II.) wie oft dieses Product die Einheiten der nächst höhern Ordnung enthält, und schreibe den Rest aus dieser Division; oder, wenn keiner bleibt, eine Nulle, in die gehörige Stelle unter einen gezogenen Strich.

II. Man gehe zur zweyten der gegebenen Zahlen, mache das Product aus ihr in den Multiplicator, addire hierzu den (in I.) gefundenen Quotienten, dividire diese Summe wieder (nach §. 72, II.) um zu finden, wie viele Einheiten der nächsthöhern Stelle darin enthalten sind,

schreibe den allenfallsigen Rest in seine gehörige Stelle, und behalte den Quotienten zur folgenden Multiplication im Sinne.

III. Man verfahre so (nach I. u. II.) mit jeder folgenden Stelle der gegebenen Zahl, bis man zur höchsten Stelle kömmt, wo das Product, ohne einige Veränderung, hingeschrieben wird.

Beweis. Die Richtigkeit der gegebenen Auflösung beruht theils auf dem Satze: Was mit allen Ordnungen einer Zahl geschieht, geschieht auch mit der Zahl selbst; theils aber daraus, daß nur Einheiten von einerley Art beysammen stehen können.

Beyspiele.

I.	Gulden.	Kreuzer.	Pfennige.	
	3785	34	3	Multiplicand.
			18	Multiplicator.
	68140	25	2	Product.

Erläuterung. 18mal 3 Pfennige geben 54 Pfennige, oder, durch die Division mit 4, 13 Kreuzer und 2 Pfennige zum Reste, welche in die Stelle der Pfennige geschrieben werden. Nun sage man 18mal 34 Kreuzer sind 612 Kr., hierzu die aus der vorigen Division entsprungenen 13 Kr addirt, gibt 625 Kr., oder, indem man durch 60 dividirt, 10 Gulden und 25 Kr., welche als Rest in der Stelle der Kreuzer bleiben. Endlich sind 18mal 3785 Gulden so viel als 68130 Gulden, wozu die 10 Gulden addirt, eine Summe von 68140 Gulden geben.

II. Centner.	Pfunde.	Lothe.	Quentchen.	
783	56	18	2	Factoren.
			43	
33693	32	27	2	Product.

§. 107. Anmerkung. Die vorige Aufgabe kann auch so aufgelöst werden, daß man alle Einheiten der höhern Gattungen auf Einheiten der niedrigsten bringt, diese ganze Summe nun mit dem gegebenen Multiplicator multiplicirt, und das Product durch die Division wieder in die höheren Wertharten verwandelt. Man denke sich das erste Beyspiel (in §. 76.) und sage, die 3785 Gulden sind so viel, als 3785 × 60 Kr. oder sie geben 227100 Kr., und diese sind wieder soviel als 227100 × 4 = 908400 Pfennige. Ferner sind die gegebenen 34 Kr. = 34 × 4 = 136 Pfennige. Daher ist der ganze Multiplicand, nach dieser Reduction in Pfennige, = 908400 + 136 + 3 Pf. = 908539 Pf. Diese nunmehr durch 18 multiplicirt, gibt ein Product von 16353702 Pf. welches, durch 4 dividirt, zum Quotienten 4088425 Kr. hervorbringt, und zum Reste 2 Pf. zurückläßt. Werden nun diese 4088425 Kr., durch die Division mit 60, zu Gulden gemacht, so erhält man 68140 Gulden und 25 Kr. Folglich ist das ganze Product 68140 Gulden, 25 Kr, 2 Pfennige wie oben im Beyspiele.

§. 108. Anmerkung. Aus dem oben (§. 99.) bestimmten Begriffe der benannten Zahlen folgt, daß man zwey oder mehrere benannte Zahlen nicht miteinander multipliciren kann. Denn 8 Gulden mit 6 Gulden multipliciren, hieße soviel, als jene 8 Gulden sollen 6 Gulden mal genommen werden, was durchaus keinen verständigen Sinn hat Daher sind Producte aus benannten Zahlen in benannte Zahlen als unmögliche Größen zu betrachten. Wenn daher der eine Factor eine benannte, der andere eine reine Zahl ist, so betrachte man jene immer als Multiplicanden, und diese als den Multiplicator, aber nicht umgekehrt.

§. 109. Aufgabe. Benannte Zahlen durch gegebene unbenannte zu dividiren.

Auflösung. I. Man dividire mit dem gegebenen Divisor in die höchste Werthart der gegebenen benannten Zahlen, und setze den Quotienten neben den gezogenen Strich, wie im ersten Beyspiele.

II. Den Rest aus dieser Division verwandle man in die Einheiten der unmittelbar folgenden niedrigern Werthart, setze die in derselben vorhandenen gleichartigen Einheiten dazu, und dividire diese Summe von Neuem durch den gegebenen Divisor, schreibe den Quotienten nach (I.) verwandle den Rest wie in (II.), addire die folgende nächst kleinere Zahl dazu, und fahre.

III. Auf eben diese Art mit allen folgenden Stellen bis zur niedrigsten fort, wobey denn der allenfallsige Rest auß der letzten Division anzeigt, daß derselbe durch den Divisor noch einmal getheilt werden soll.

Beweis. Die gegebene Vorschrift rechtfertigt sich theils durch die gewöhnlichen Regeln der Division, theils aber durch den willkührlichen Werth der benannten Zahlen.

Beyspiel. I. Es sollen 7843 Gulden, 57 Kr. und 3 Pf. unter 9 Personen gleich ausgetheilt werden. Wieviel bekömmt Einer? Die Rechnung ist diese:

```
Divisor.  Gulden.  Kr.  Pf.
   9|      7843    54   3 Dividend.
   9|      7843 (871    Quotient aus den Guld.
           72..
           ----
            64.
            63.
           ----
             13
              9
           ----
              4 Rest von Gulden.
             60
           ----
            240 in Kr. verwandelt.
             54 Die gegebene Kr. addirt.
           ----
      9|    294 (32 Quot. aus den Kr.
            27.
           ----
             24
             18
           ----
              6 Rest aus den Kr.
              4
           ----
             24 in Pf. verwandelt.
              3 die gegebenen Pf. addirt.
           ----
    9|       27 (3 Quot. aus den Pf.
             27
           ----
              0
```

Der ganze Quotient ist daher 871 Gulden, 32 Kr. und 3 Pf.

II. Man soll 4389 Centner, 85 Pfunde, 18 Lothe und 2 Quentchen unter 16 Menschen gleich austheilen. Was ist der Antheil eines jeden? Die Rechnung gibt Folgendes:

```
  Centner.  Pf.  Loth.  Quent.
16| 4389   85    18     2
16| 4389 (274 Quotient aus den Centnern.
    32..
    ----
    118.
    112.
    ----
      69
      64
    ----
       5 Rest von Centnern.
     100
    ----
     500 in Pf. verwandelt.
      85 die gegebenen Pf. addirt.
    ----
16|  585 (36 Quot. aus Pf.
     48.
    ----
     105
      96
    ----
       9 Rest aus Pf.
      32
    ----
     288 in Lothe verwandelt.
      18 die gegebenen Lothe addirt.
    ----
16|  306 (19 Quot. aus Lothen.
     16.
    ----
     146
     144
    ----
       2 Rest von Lothen.
       4
    ----
       8 in Quentchen verwandelt.
       2 die vorhandenen Q. addirt.
    ----
```

16|10 (Quot. weniger als 1 Quentchen, weil nur 10 Quentchen unter 16 zu vertheilen sind.

§. 110. Zusatz. In der vorigen Aufgabe wurde eine benannte Zahl durch eine unbenannte dividirt, und der Quotient mußte deshalb eine benannte Zahl geben, weil jeder Theil einer benannten Zahl gleichartig mit sich selbst, d. h. wiederum benannt seyn muß. Auch stimmt damit die bekannte Probe der Division überein, nach welcher der unbenannte Divisor, mit dem benannten Quotienten multiplicirt, einen benannten Dividenden hervorbringt. Aber kann denn auch sowohl der Divisor als der Dividend eine benannte Zahl seyn? Allerdings; und nun ist, wenn nur Divisor und Dividend gleichartige Größen sind, der Quotient eine reine Zahl. So sind z. B. 5 Gulden in 30 Gulden 6mal; 3 Pfunde in 24 Pfunden 8mal enthalten u. s. w. Auch hier hat die Divisionsprobe Statt. — Wenn aber der Divisor eine benannte, der Dividend eine unbenannte Zahl ist, so wird der Quotient, der nun weder rein, noch benannt seyn kann, unmöglich.

§. 111. Anmerkung. Auch die Divisionsaufgaben können auf eine andere Art (nach §. 107.) aufgelöst werden, indem man zuerst alle gegebene benannte Zahlen auf die Einheiten der niedrigsten Werthart bringt, nun die Division mit dem gegebenen Divisor verrichtet, und endlich den sich hieraus ergebenden Quotienten (nach 107.) wieder zurück auf die höhern Wertharten bringt. Zum Beyspiele diene das erste Exempel in §. 109. Die dortigen 7843 Gulden in Kreuzer verwandelt, gibt $7843 \times 60 = 470580$ Kr., oder $470580 \times 4 = 1882320$ Pfennige. Die gegebenen 54 kr. geben $54 \times 4 = 216$ Pf. Folglich ist die dortige ganze benannte Zahl so viel als $1882320 + 216 + 3 = 1882539$ Pf. Dieses durch 9 dividirt, gibt (nach §. 60.) Folgendes:

9|1882539|209171 Pfennige.

Diesen Quotienten, mit 4 dividirt, gibt die Kreuzer, welche darin enthalten sind, oder

4|209171|52292 Kreuzer, nebst einem Reste von 3 Pf. Dieser letztere Quotient, nun wieder mit 60 dividirt, gibt Folgendes für die Gulden.

```
60|52292|871 Gulden.
   480..
   -----
    429.
    420.
    ----
      92
      60
    ----
      32 Rest von Kr.
```

Daher ist der 9te Theil der gegebenen Zahl so viel als 871 Gulden, 32 Kr. und 3 Pf. wie oben.

§. 112. Anmerkung. Auch bey der Multiplication und Division in benannten Zahlen findet (§. 64.) seine Anwendung, indem jede dieser beyden Rechnungsarten der andern zur Probe dienen kann. Es ist daher Anfängern sehr nützlich, sich in dergleichen Proberechnungen mehrfach zu üben, um sich hierin eine desto größere Fertigkeit zu erwerben.

Fünfte Abtheilung.

Von den gemeinen Brüchen.

§. 113. Lehrsatz. Die Einheit (§. 7.) durch eine gegebene Zahl dividiren, heißt, die 1 in so viele gleiche Theile, als der Divisor es anzeigt, eintheilen, und Einen dieser Theile nehmen.

Beweis. Aus dem Begriffe der Division (§.21.) folgt, daß der Dividend in so viele gleiche Theile getheilt werden soll, als wie viele Einheiten der Divisor enthält. Ist daher der Dividend die Einheit, und der Divisor eine größere Zahl, so wird die Einheit selbst in so viele gleiche Theile getheilt, als wie viele der Divisor enthält, und Ein solcher Theil ist der Quotient. Z. B. 1 durch 7 dividiren, heißt, diese 1 in 7 gleiche Theile eintheilen, und der hieraus entstehende Quotient ist offenbar so viel, als der siebente (gleiche) Theil von 1.

§. 114. Lehrsatz. Eine kleinere Zahl durch eine größere dividiren, heißt so viel, als die Einheit, woraus beyde Zahlen bestehen, in so viele gleiche Theile theilen, als die größere es anzeigt, und von diesen Theilen so viele nehmen, als die kleinere enthält.

Beweis. Wenn man eine Einheit des Dividenden durch den gegebenen Divisor dividirt, so heißt es so

viel, als diese Einheit nach der Menge der Einheiten des Divisors eintheilen, und einen dieser Theile nehmen (§. 113.). Nun ist aber in dem gegenwärtigen Falle der Dividend so vielmal größer als 1, als wie viele Einheiten derselbe enthält. Folglich muß auch der Quotient auf eben diese Art vergrößert werden, d. h. er muß so viele von den nach dem Divisor getheilten Theilen der Einheit enthalten, als aus wie vielen der Dividend besteht. Z. B. die Zahl 5 durch 7 dividiren, heißt, die Einheit in 7 gleiche Theile theilen, und 5 von solchen Theilen, d. h. fünf siebente Theile (fünfsiebentel) nehmen. Denn offenbar ist $5:7 = 5 \times (1:7)$. Allein $1:7$ ist nach §. 113. so viel, als ein siebenter Theil, folglich $5 \times (1:7)$ so viel, als fünfmal dieser siebente Theil, oder so viel als fünf siebentel.

Zusatz. I. Wenn Divisor und Dividend gleiche Zahlen sind, so wird der Quotient $= 1$; denn nun kann jener von diesem gerade einmal abgezogen werden. (§. 121. u. 34.). Daher sind die Quotienten, welche in (§. 113. und §. 114) entstehen, offenbar kleiner als 1, und enthalten somit bloße Theile der Einheit.

II. Die dortigen Quotienten sind jedoch wirkliche Zahlen (§. 7.), denn sie enthalten eine bestimmte Vielheit der in gleiche Theile getheilten Einheit.

§. 116. Erklärung. Zahlen, deren Einheiten Theile eines gleichgetheilten Ganzen sind, nennt man Brüche oder gebrochne Zahlen. Z. B. die fünf siebentel in §. 114. sind nichts anders als eine Zahl, welche die Einheit (ein siebentel) fünfmal enthält.

§. 117. Erklärung. Weil die Brüche bestimmte Mengen der in gleiche Theile getheilten Einheit sind, so

ist klar, daß die Größe eines Bruchs sowohl von der Art der Eintheilung des Ganzen, als auch von der Vielheit dieser Theile abhängt. Man muß daher bey jedem Bruche Zweyerley wissen; erstlich in wie viele gleiche Theile die Einheit ist getheilt worden; und dann, wie viele dieser Theile vorhanden sind. Jenes wird durch den Nenner, und dieses durch den Zähler bestimmt.

§. 118. Willkührlicher Satz. Weil sowohl der Zähler, als der Nenner (§. 117.) durch Zahlen ausgedrückt werden kann, so schreibe man einen Bruch dergestalt, daß die Ziffer des Zählers oberhalb, jene des Nenners unterhalb eines zwischen beyden gezogenen waagrechten Queerstrichs zu stehen kömmt. So zeigt der Bruch $\frac{3}{4}$ an, daß das Ganze (die Einheit) in 4 gleiche Theile eingetheilt ist, und daß 3 solcher Theile zu einer Zahl verbunden worden sind. Man drückt dieses durch dreyvierte Theile, oder kürzer durch Dreyvietel aus. Die Brüche $\frac{7}{12}$, $\frac{10}{17}$, $\frac{2}{5}$ heißen daher sieben Zwölftel, zehn Siebenzehntel, zwey Fünftel.

§. 119. Grundsätze. I. Alle Brüche, deren Zähler und Nenner gleich sind, haben einen Werth = 1. Denn man theilt in solchen Brüchen das Ganze in so viele gleiche Theile durch den Nenner (§. 117.), als wie viele durch den Zähler (§. 117.) wieder zusammengefaßt werden. Folglich bekömmt man das Ganze selbst wieder, da alle Theile zusammengenommen dem Ganzen gleich sind. Z. B. $\frac{3}{3} = \frac{5}{5} = \frac{8}{8} = \frac{48}{48} = \frac{749}{749} = 1$.

II. Wenn der Zähler eines Bruches kleiner als dessen Nenner ist, so ist der ganze Bruch kleiner als 1. Denn in diesem Falle sind weniger von den gleichen

Theilen vorhanden, als in wieviele das ganze durch den Nenner ist eingetheilt worden. Die Brüche $\frac{5}{8}$, $\frac{7}{12}$, $\frac{15}{29}$, $\frac{6}{13}$ sind folglich alle kleiner als 1.

III. Wenn der Zähler eines Bruches größer als sein Nenner ist, so ist der Bruch selbst größer als 1. Denn er enthält mehr von den gleichen Theilen, als in wie viele das Ganze eingetheilt worden ist. Daher sind die Brüche $\frac{9}{5}$, $\frac{7}{2}$, $\frac{12}{5}$, $\frac{148}{49}$ u. s. w. alle größer als 1.

§. 120. Erklärung. Brüche, wie die in §. 119, I. III., welche entweder die Einheit selbst, oder noch mehr als die Einheit enthalten, heißen unächte Brüche oder Scheinbrüche. Andere hingegen, welche das Ganze nicht selbst, sondern nur einen Theil desselben enthalten, wie die Brüche in §. 119, II. werden ächte Brüche oder wahre Brüche genennt.

§. 121. Zusatz. Nunmehr erklärt sich auch, was der Rest bedeutet, welcher bey den gewöhnlichen Divisionsaufgaben (§. 62.) öfters übrig bleibt. Er ist nämlich ein Theil des Dividenden, welcher, nach dem Sinne der Division, noch durch den Divisor getheilt werden soll, aber nicht mehr in ganze Einheiten getheilt werden kann, weil er kleiner als der Divisor ist. Daher tritt auch hier der Fall des §. 114 ein, und man muß diesen Rest als den Zähler eines Bruchs ansehen, dessen Nenner der Divisor ist. So wird z. B. 239 : 8 = 29 nebst einem Reste von 7, der noch durch 8 getheilt, d. h. in 8 gleiche Theile getheilt werden soll. Nun ist aber der 8te Theil von 1 so viel, als $\frac{1}{8}$; folglich der 8te Theil von 7 offenbar 7mal größer, oder soviel als $\frac{7}{8}$. Daher

wird der ganze Quotient 29 und $\frac{7}{8}$. Desgleichen gibt $7458 : 14 = 532 + \frac{10}{14}$ u. s. w. —

§. 122. Grundsatz. I. Alle Brüche sind Quotienten aus dem Zähler als Dividend und aus dem Nenner als Divisor. So heißt z. B. $\frac{7}{12}$ so viel, als das Ganze in 12 gleiche Theile theilen und 7 von ihnen nehmen. Eben so ist aber auch $7 : 12 = 7 \times (1 : 12)$. Allein $1 : 12 = \frac{1}{12}$. Folglich $7 \times (1 : 12) = 7$mal ein Zwölftel, oder sieben Zwölftel. —

II. Alle Quotienten sind Brüche, deren Zähler der Dividend und deren Nenner der Divisor ist. So heißt 7 : 12 nichts anders, als die 7 soll in 12 gleiche Theile getheilt werden. Einer von diesen Theilen muß nothwendig 7mal größer seyn, als wenn die 1 in 12 Theile eingetheilt werden sollte. Allein 1 : 12 ist soviel als ein Zwölftel. Daher ist der 7mal größere Quotient so viel als sieben Zwölftel oder als der Bruch $\frac{7}{12}$, dessen Zähler 7, dessen Nenner 12 ist.

§. 123. Aufgabe. Zu finden, wie viele ganze in Einheiten einem uneigentlichen Bruche (§. 120.) enthalten sind.

Auflösung. Man dividire mit dem Nenner des gegebenen Bruches in seinen Zähler; der Quotient aus dieser Division (welcher entweder aus einer reinen ganzen Zahl, oder aus einer ganzen Zahl nebst einem ächten Bruche besteht) bestimmt die Menge der in dem Bruche enthaltenen ganzen Einheiten.

Beweis. Alle Brüche, welche gleiche Zähler und Nenner haben, sind = 1. (§. 119.). Daher muß ein gegebener uneigentlicher Bruch diese 1 so oft enthal-

ten, als wie oft dessen Nenner von dem Zähler abgezogen werden kann. Allein, wie oft dieser Abzug geschehen kann, findet man durch die Division des Nenners in den Zähler (§. 21.). Daher ist obige Auflösung richtig.

Beyspiele.

$\frac{17}{3} = 17 : 3 = 5\frac{2}{3}$; $\frac{35}{5} = 35 : 5 = 7$; $\frac{49}{4} = 49 : 4 = 12\frac{1}{4}$; $\frac{217}{8} = 217 : 8 = 27\frac{1}{8}$ u. s. w.

§. 124. Aufgabe. Eine gegebene ganze Zahl in einen Bruch zu verwandeln, dessen Nenner gegeben ist.

Auflösung. Man multiplicire die ganze Zahl mit dem gegebenen Nenner, und setze unter dieses Product eben diesen Nenner, so hat der so entstandene Bruch die verlangte Eigenschaft.

Beweis. Die Multiplication und Division sind ihrer Natur nach (§. 18 und 21.) entgegengesetzte Rechnungsarten; welche, bey gleichen Zahlen, einander wechselseitig zernichten. Nun wird aber die gegebene ganze Zahl durch den Nenner des zu findenden Bruchs sowohl multiplicirt, als auch dividirt, folglich diese Zahl selbst an ihrer Größe gar nicht verändert, und nur in Bruchform ausgedrückt.

Beyspiele. I. Man soll 9 in einen Bruch verwandeln, dessen Nenner 7 ist. Hier ist $9 = \frac{9 \times 7}{7} = \frac{63}{7}$.

II. Die Zahl 12 in einen Bruch umzuändern, der zum Nenner 9 hat, gibt $12 = \frac{12 \times 9}{9} = \frac{108}{9}$.

§. 125. Lehrsatz. Wenn man eines Bruches Zähler mit einer ganzen Zahl multiplicirt, und unter

dieses Product den unveränderten Nenner setzt, so entsteht ein neuer Bruch, welcher so vielmal größer als der gegebene ist, als wie viele Einheiten die ganze Zahl hatte.

Beweis. Der Zähler eines Bruchs zeigt, seiner Natur nach, an, wie viele solcher gleichen Theile der Bruch enthält, als in welche das Ganze durch den Nenner ist eingetheilt worden (§. 117). Er zeigt also die Menge der Einheiten an, welche in dem gegebenen Bruche vorhanden sind. Je größer daher die Menge dieser Einheiten ist, desto größer ist auch der Bruch selbst. Nun wird aber durch die Multiplication des Zählers mit der ganzen Zahl der Zähler so vielmal größer, als diese Zahl Einheiten enthält (§. 30. II.); daher wird auch die Menge der in dem Bruche vorhandenen Einheiten, d. h. der Bruch selbst, so vielmal größer. Z. B. $\frac{5}{8}$ am Zähler mit 6 multiplicirt gibt $\frac{5 \times 6}{8} = \frac{30}{8}$; einen Bruch, der 6mal größer, als der gegebene ist.

§. 126. Lehrsatz. Wenn man eines Bruches Nenner mit einer gegebenen ganzen Zahl multiplicirt, und dieses Product unter den unveränderten Zähler setzt, so wird der neue Bruch so vielmal kleiner als der gegebene seyn, als wie viele Einheiten die ganze Zahl enthält.

Beweis. Der Nenner eines Bruchs zeigt an, in wieviele gleiche Theile das Ganze ist eingetheilt worden (§. 117.). Jeder dieser Theile wird folglich um so kleiner werden, in je mehrere man das Ganze eingetheilt hat. Nun wird aber durch die Multiplication des Nenners mit der gegebenen ganzen Zahl der Nenner selbst so

vielmal größer, als diese Zahl Einheiten enthält. (§. 30, II). Daher wird das Ganze jetzt in so vielmal mehr gleiche Theile getheilt, und einer dieser Theile muß daher eben so vielmal kleiner werden; folglich auch der ganze Bruch, indem die Menge seiner Einheiten immer die nämliche bleibt. Z. B. $\frac{5}{8}$ am Renner mit 6 multiplicirt, gibt $\frac{5}{8 \times 6} = \frac{5}{48}$, welcher Bruch 6mal kleiner als der gegebene $\frac{5}{8}$ ist.

§. 127. Zusatz. Wenn daher sowohl der Zähler als der Renner mit einerley Zahl multiplicirt wird, so bleibt der Werth des Bruches selbst ganz unverändert. Denn durch die Multiplication am Zähler wird derselbe so vielmal größer (§. 125.), als er durch das Multipliciren am Renner wiederum kleiner wird (§. 126.) Folglich heben sich diese beyde Veränderungen wechselseitig auf, und der Bruch bleibt der nämliche. Z. B. $\frac{7}{9} = \frac{7 \times 4}{9 \times 4} = \frac{28}{36} = \frac{7 \times 5}{9 \times 5} = \frac{35}{45}$ u. s. w.

§. 128. Zusatz. Soll also ein gegebener Bruch durch eine ganze Zahl multiplicirt werden, so wird dieses dadurch geschehen, daß dessen Zähler mit dieser ganzen Zahl multiplicirt, und der Renner ohne Veränderung unter dieses Product gesetzt wird. Z. B. $\frac{7}{9} \times 8 = \frac{7 \times 8}{9} = \frac{56}{9} = 6\frac{2}{9}$ (§. 125 und §. 18.)

§. 129. Zusatz. Soll man hingegen einen Bruch durch eine gegebene Zahl dividiren, so wird dies geschehen, indem man den Renner des Bruchs mit dieser Zahl multiplicirt. (§. 126 und §. 21.) Z. B. $\frac{5}{8} : 9 = \frac{5}{8 \times 9} = \frac{5}{72}$. Oder $\frac{9}{17} : 6 = \frac{9}{17 \times 6} = \frac{9}{102}$.

§. 130. Lehrsatz. Wenn der Zähler eines gegebenen Bruchs mit einer ganzen Zahl dividirt wird, der

Nenner hingegen unverändert bleibt, so wird der ganze Bruch so vielmal kleiner, als die Zahl, womit man dividirt, Einheiten enthält.

Beweis. Weil der Zähler die Menge der Einheiten anzeigt, welche in dem ganzen Bruche enthalten sind, (§. 117), so wird, durch die Division des Zählers, diese Menge von Einheiten offenbar so vielmal vermindert, als der Divisor selbst die Einheit enthält (§. 33.). Folglich wird auch der Bruch selbst so vielmal kleiner. Z. B. $\frac{18}{49} : 6 = \frac{3}{49}$, und der letzte Bruch ist 6mal kleiner als der erste.

§. 131. Lehrsatz. Wenn der Nenner eines gegebenen Bruchs durch eine ganze Zahl dividirt, und der hieraus entstehende Quotient wieder unter den vorigen Zähler gesetzt wird, so ist dieser neue Bruch so vielmal größer als der erste, als wie viele Einheiten der Divisor enthält.

Beweis. Der Nenner zeigt an, in wie viele gleiche Theile das Ganze ist eingetheilt worden (§. 117). Durch die Division desselben mit der gegebenen ganzen Zahl wird der Nenner des neuen Bruchs so vielmal kleiner als der gegebene, als wie viele Einheiten der Divisor enthält. (§. 33.). Daher wird das Ganze nun in so vielmal weniger gleiche Theile getheilt, und eben hierdurch jeder einzelne Theil so vielmal größer. Folglich wird auch der ganze Bruch so vielmal größer. Z. B. $\frac{8}{18} : 6 = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$ (§. 123.) und der letztere Bruch ist fünfmal größer als der erste.

§. 132. Zusatz. Wird daher sowohl der Zähler

als der Nenner eines Bruchs mit einerley dritten Zahl dividirt, so geben die Quotienten aus Zähler und Nenner des gegebenen Bruches den Zähler und Nenner eines neuen, welcher dem ersten vollkommen gleich ist. Denn durch die Division an dem Zähler wird derselbe so vielmal kleiner (§. 130.) als man ihn durch die Division an dem Nenner wieder größer macht. (§. 139.) Folglich behält der Bruch seinen nämlichen Werth. Z. B.

$\frac{248}{688} = \frac{248:2}{688:2} = \frac{124}{344}; \frac{124:2}{344:2} = \frac{62}{172} = \frac{62:2}{172:2} = \frac{31}{86}$.

§. 133. Zusatz. Soll daher ein gegebener Bruch mit einer ganzen Zahl dividirt werden, so darf man nur den Zähler desselben mit dieser Zahl dividiren, und den Nenner unverändert unter diesen Quotienten setzen; denn hierdurch wird der Bruch so vielmal kleiner als gefodert wird. (§. 130.) So ist $\frac{36}{47} : 9 = \frac{36:9}{47} = \frac{4}{47}$.

§. 134. Zusatz. Sollte hingegen der angegebene Bruch durch eine ganze Zahl multiplicirt werden, so kann man den Nenner desselben mit ihr dividiren, und über den Quotienten den unveränderten Zähler setzen. Denn hierdurch wird der Bruch so vielmal größer (§. 139.) Demnach ist $\frac{29}{48} \times 8 = \frac{29}{48:8} = \frac{29}{6} = 4\frac{5}{6}$ (§. 123.).

§. 135. Zusatz. Aus dem Bisherigen folgt, daß man einen gegebenen Bruch auf zweyerley Art mit einer ganzen Zahl multipliciren, und auch auf doppelte Art durch sie dividiren kann. Jenes geschieht nämlich, wenn man entweder seinen Zähler mit derselben multiplicirt (§. 128.), oder dessen Nenner mit ihr dividirt. (§. 132.). Dieses hat Statt, indem man entweder den Zähler mit der ganzen Zahl dividirt, (§. 133.) oder den Nenner

mit derselben multiplicirt (§. 129.) Diese Divisionen sind vortheilhaft, wenn kein Rest bleibt.

§. 136. Erklärung. Einen Bruch heben, oder aufheben heißt: denselben, seiner Größe unbeschadet, in einen andern verwandeln, dessen Zähler und Nenner kleinere Zahlen, als Zähler und Nenner des gegebenen Bruches sind. Einen Bruch zur kleinsten Benennung bringen, heißt: denselben, ohne Veränderung seines Werthes, durch die kleinsten Zahlen ausdrücken, in welchen er dargestellt werden kann.

§. 137. Aufgabe. Einen gegebenen Bruch zu heben.

Auflösung. Man dividire den Zähler und Nenner des gegebenen Bruchs durch eine Zahl, welche in beyden ohne Rest aufgeht, so sind die Quotienten, in eben dieser Ordnung, Zähler und Nenner des zu findenden Bruchs.

Beweis. Der durch die Auflösung entstandene neue Bruch ist, in Rücksicht seiner Größe, mit dem gegebenen vollkommen einerley (§. 132.). Auch sind Zähler und Nenner desselben kleinere Zahlen (§. 36.) Folglich ist der erstere Bruch gehoben (§. 136).

Beyspiele.

$\frac{68}{184} = \frac{68:4}{184:4} = \frac{17}{46}$; $\frac{608}{1792} = \frac{608:2}{1792:2} = \frac{304}{896} = \frac{304:2}{896:2} = \frac{152}{448} = \frac{152:2}{448:2} = \frac{76}{224} = \frac{76:2}{224:2} = \frac{38}{112} = \frac{38:2}{112:2} = \frac{19}{56}$; $\frac{30806}{40700} = \frac{308}{407}$ (§. 67.) $= \frac{308:11}{407;11} = \frac{28}{37}$

u. s. w.

§. 138. Anmerkung. Die obige Auflösung setzt voraus, daß man eine dritte Zahl wisse, welche im Zähler und Nenner des angegebenen Bruches ohne Rest aufgeht, d. h. welche ein gemeinschaftlicher Factor vom Zähler und Nenner ist. Ohne dieses ist sie meist nicht von Nutzen. Es ist daher vortheilhaft, irgend ein Merkmal zu haben, welches angibt, ob eine, und welche Zahl das gemeinschaftliche Maas zweyer andern ist. Daher bemerke man folgende Regeln, deren Grund der Lehrer dem wißbegierigen Schüler gerne entwickeln, und durch Beyspiele erläutern wird:

1) Wenn sich zwey Zahlen auf 2, 4, 6, 8, oder 0 endigen, so lassen sie sich immer durch 2, bisweilen auch durch 6 oder 8 ohne Rest dividiren.

2) Endigen sie sich auf 5 oder 0, so ist 5 ihr gemeinschaftliches Maas.

3) Zahlen, deren niedrigste Ziffer eine 1, 3, 7 oder 9 ist, lassen sich entweder mit 3 oder 7, oder mit gar keiner dritten Ziffer aufdividiren.

4) Wenn die Summe aller Ziffer einer Zahl die 3, oder ein Mehrfaches der 3 ausmacht, so ist diese Zahl durch 3 theilbar.

5) Wenn die verdoppelten Einer einer Zahl so groß, als eine Summe aus den Ziffern der höhern Stellen, oder von ihnen um eine 7 oder ein Mehrfaches der 7 unterschieden sind, so ist diese 7 der gesuchte Factor.

6) Zahlen, deren Ziffer zusammen eine 9 oder ein Mehrfaches der 9 geben, sind durch 9 ohne Rest theilbar.

7) Wenn eine Zahl aus zwey gleichen Ziffern besteht, so ist sie durch 11, und wenn sie aus drey gleichen Ziffern zusammengesetzt ist, durch 37 theilbar.

§. 139. Anmerkung. Durch das bisherige Verfahren ist man im Stande, einen gegebenen Bruch durch kleinere Zahlen auszudrücken. Es gibt aber nebst diesem eine Methode, wodurch ein Bruch zur kleinsten Benennung (§). gebracht werden kann. Sie ist folgende:

1) Man dividire den Zähler des gegebenen Bruchs, welcher bey einem ächten Bruche, der hier vorausgesetzt wird, allemal kleiner, als der Nenner ist, (§). in seinen Nenner. Bleibt hier kein Rest übrig, so ist der Zähler selbst der größte gemeinschaftliche Factor. Z. B. $\frac{12}{96} = \frac{12:12}{96:12} = \frac{1}{8}$, wo offenbar $\frac{1}{8}$ der kleinste Ausdruck von $\frac{12}{96}$ seyn muß.

2) Bleibt hingegen bey der Division in 1) noch ein Rest, so dividire man wieder mit diesem Reste in den vorigen Divisor. Geht diese Division ohne weitern Ueberrest auf, so ist der zuvor gebliebene Rest der größte gemeinschaftliche Factor vom Zähler und Nenner. Wenn z. B. $\frac{6}{27}$ der gegebene Bruch ist, so gibt das Verfahren Folgendes:

```
6|27(4
  24
  ---
   3|6(2
     6
    ---
     0
```

Hier ist der Ueberrest aus der ersten Division genau in dem ersten Divisor enthalten; folglich ist 3 der gemeinschaftliche Factor. Daher $\frac{6}{27} = \frac{6:3}{27:3} = \frac{2}{9}$, und diese $\frac{2}{9}$ sind die kleinste Benennung von $\frac{6}{27}$.

3) Geht bey der zweyten Division der Divisor wieder nicht genau in dem Dividenden auf, so dividire man abermal mit diesem neuen Reste in den letztern Divisor. Ist dieser genau ein Mehrfaches vom letztern Reste, so ist dieser Ueberrest wieder jene Zahl, womit der Bruch zur kleinsten Benennung gebracht werden kann. Es sey $\frac{10}{18}$ der gegebene Bruch, so entsteht folgende Rechnung:

```
10|18(1
   10
   ---
    8|10(1
       8
      ---
       2|8(4
         8
        ---
         0
```

Hier ist 2 der gemeinschaftliche Divisor, und $\frac{10}{18} = \frac{10:2}{18:2} = \frac{5}{9}$.

4) Man fahre, wenn bey fortgesetzten Divisions-Arbeiten immer noch Reste bleiben, nach 2) und 3) fort, bis entweder die Division eines solchen Restes in den unmittelbar vorhergegangenen Divisor aufgeht, oder bis man zu einem Reste kömmt, welcher = 1 ist. In diesem letzten Falle ist es ein Zeichen, daß der Bruch, so wie er gegeben ist, schon auf der kleinsten Benennung sey. Man denke sich $\frac{19}{25}$, so gibt die Rechnung dieses:

```
19|25(1
   19
  ----
    6|19(3
      18
     ----
      1|6(6
        6
       ---
        0
```

Nach diesem wäre 1 der gemeinschaftliche Factor. Durch Multiplication und Division einer Zahl mit 1 wird aber diese Zahl nicht verändert.

Daher kann der gegebene Bruch $\frac{19}{25}$ nicht weiter mehr durch kleinere Zahlen ausgedrückt werden. Den Grund dieser Regeln wird der Lehrer den Schülern erklären.

§. 140. Anmerkung. Weil man in kleinern Zahlen sowohl leichter und geschwinder rechnen, als auch die Größe eines Bruches um so bequemer übersehen kann, so bedarf es keiner fernern Erinnerung, wie nützlich die Auflösung dieser Aufgabe für den ausübenden Rechner ist.

§. 141. Erklärung. Brüche unter einerley Benennung bringen, heißt: dieselbe, ohne ihre Größe zu verändern, in andere verwandeln, welche einerley Nenner haben.

§. 142. Aufgabe. Zwey gegebene Brüche unter einerley Benennung zu bringen.

Auflösung. Man multiplicire den Nenner eines jeden Bruches mit dem Zähler des andern, und die beyden Nenner unter sich. Jene Producte geben die beyden Zähler der zu findenden Brüche in der nämlichen Ordnung. Dieses hingegen ist ihr gemeinschaftliche Nenner.

Beweis. Durch die Auflösung wurde Zähler und Nenner eines jeden gegebenen Bruchs mit einerley Zahl (dem Nenner des andern Bruches) multiplicirt, folglich bleiben diese Brüche in ihrem Werthe unverändert. Auch werden hierdurch die neuen Nenner Producte aus einerley Factoren, folglich an Größe einander gleich.

Beyspiele

Die Brüche seyen $\frac{5}{7}$ und $\frac{4}{9}$, so ist $\frac{5}{7} = \frac{5 \times 9}{7 \times 9} = \frac{45}{63}$ und $\frac{4}{9} = \frac{4 \times 7}{9 \times 7} = \frac{28}{63}$, und man hat $\frac{45}{63}$ und $\frac{28}{63}$ so groß als $\frac{5}{7}$ und $\frac{4}{9}$. Ferner: $= \frac{12}{19}$ und $\frac{28}{47}$ gibt $\frac{12}{19}$: $\frac{12 \times 47}{19 \times 47} = \frac{564}{893}$ und $\frac{28}{47} = \frac{28 \times 19}{47 \times 19} = \frac{532}{893}$,

§. 143. Anmerkung. Wenn der Fall eintritt, daß der Nenner des einen Bruchs in jenem des andern ohne Rest aufgeht, so multiplicire man Zähler und Nenner des ersten Bruchs mit dem Quotienten aus beyden Nennern. Der hieraus entstehende neue Bruch ist nun mit dem andern von einerley Benennung. Die Brüche seyen $\frac{7}{12}$ und $\frac{19}{36}$, so ist 12 in 36 ohne Rest 3mal enthalten, und man sagt: $\frac{7}{12} = \frac{7 \times 3}{12 \times 3} = \frac{21}{36}$, welcher Bruch mit dem andern $\frac{19}{36}$ einerley Nenner hat. — Sind die Brüche $\frac{7}{8}$ und $\frac{241}{96}$, so ist $96 : 8 = 12$, und $\frac{7}{8} =$

$\frac{7 \times 12}{8 \times 12} = \frac{84}{96}$, welcher wieder mit dem andern den nämlichen Nenner hat.

§. 144. Aufgabe. Wenn mehr als zwey Brüche gegeben sind, dieselbe unter einerley Nenner zu bringen.

Auflösung. Man multiplicire den Zähler und Nenner eines jeden Bruches mit einem Producte aus den Nennern der noch übrigen Brüche, so entstehen so viele neue, als gegeben worden, welche jenen, in der nämlichen Ordnung, gleich sind und mit ihnen einerley Benennung haben.

Beweis. Daß die gefundenen Brüche den gegebenen einzeln gleich sind, erhellet daraus, weil Zähler und Nenner eines jeden mit einerley Zahl multiplicirt wurden Daß sie aber alle auch einerley Nenner haben, ist daraus klar, weil die neuen Nenner Producte aus allen gegebenen Nennern sind.

Beyspiele.

Die gegebenen Brüche seyen $\frac{5}{7}$, $\frac{8}{9}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{5}$, so ist

$\frac{5}{7} = \frac{5 \times 9 \times 4 \times 5}{7 \times 9 \times 4 \times 5}$;

$\frac{8}{9} = \frac{8 \times 7 \times 4 \times 5}{9 \times 7 \times 4 \times 5}$;

$\frac{3}{4} = \frac{3 \times 7 \times 9 \times 5}{4 \times 7 \times 9 \times 5}$;

$\frac{2}{5} = \frac{2 \times 7 \times 9 \times 4}{5 \times 7 \times 9 \times 4}$; oder, wenn man die nur angezeigte Multiplication wirklich ausführt, so wird $\frac{5}{7} = \frac{900}{1260}$; $\frac{8}{9} = \frac{1120}{1260}$; $\frac{3}{4} = \frac{945}{1260}$; $\frac{2}{5} = \frac{504}{1260}$.

Wäre nebst den obigen vier Brüchen noch der fünfte $\frac{6}{11}$ gegeben, so müßte man so rechnen:

$\frac{5}{7} = \frac{900 \times 11}{1260 \times 11} = \frac{9900}{13860};$

$\frac{8}{9} = \frac{1120 \times 11}{1260 \times 11} = \frac{12320}{13860};$

$\frac{3}{4} = \frac{945 \times 11}{1260 \times 11} = \frac{10395}{13860};$

$\frac{2}{5} = \frac{504 \times 11}{1260 \times 11} = \frac{5544}{13860}$ und endlich

$\frac{6}{11} = \frac{1260 \times 6}{1260 \times 11} = \frac{7560}{13680}$, wodurch alle fünf Brüche einerley Nenner haben.

§. 145. Anmerkung. Wenn die Nenner der gegebenen Brüche einen gemeinschaftlichen Factor haben, so lassen sich dieselbe, mit Beybehaltung ihres Werthes und mit dem kleinsten Ausdrucke ihrer Zähler und Nenner, dadurch unter einerley Benennung bringen, daß man mit dem gemeinsamen Factor in den Nenner des 2ten, 3ten, 4ten Bruchs u. s. f. dividirt. Das Product aus diesen Quotienten in den Nenner des ersten Bruchs gibt nun den kleinsten Hauptnenner aller Brüche. Dividirt man nun diesen Hauptnenner mit dem Nenner des ersten Bruchs und multiplicirt diesen Quotienten mit dessen Zähler, so erhält man den Zähler des ersten neuen Bruches, und auf ähnliche Art jeden folgenden. Die Brüche seyen $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{10}$ und $\frac{11}{14}$, so ist 2 gemeinschaftlicher Factor aller Nenner, und $6 \times 5 \times 7 = 210$ der kleinste gemeinschaftliche Nenner. Daher wird $\frac{210}{6} \times 5 = 35 \times 5 = 175$ der Zähler des 1ten; $\frac{210}{10} \times 7 = 21 \times 7 = 147$ der Zähler des 2ten; $\frac{210}{14} \times 11 = 15 \times 11 = 165$ der Zähler des 3ten Bruches, und die drey Brüche sind folgende: $\frac{175}{210}$, $\frac{147}{210}$ und $\frac{165}{210}$. Nach der gewöhnlichen Rechnung wären sie $\frac{700}{840}$, $\frac{588}{840}$ und $\frac{660}{840}$ geworden.

§. 146. Anmerkung. Wenn man alle Nenner der gegebenen Brüche in ihre einfache Factoren zerlegen kann (d. h. in solche, aus deren Producte jene Zähler hervorgehen und welche selbst nicht als Producte aus zwey ganzen Zahlen entspringen) so setze man alle diese Factoren (woraus der gewöhnliche Hauptnenner entstände) neben einander, streiche jene aus, welche bereits aus den andern Nennern vorkommen und multiplicire die noch übrigen mit einander so gibt das

Product den kleinsten Hauptnenner aller Brüche, woraus man (nach §. 145.) Zähler und Nenner jedes andern Bruches leicht finden kann. Die Brüche seyen z. B. $\frac{5}{12}$, $\frac{3}{10}$ $\frac{7}{8}$, $\frac{11}{15}$, $\frac{4}{21}$, $\frac{1}{14}$, so sind die einfachen Factoren ihrer Nenner diese: $2 \times 2 \times 3 \mid 2 \times 5 \mid \underset{\cdot}{2} \times 2 \times \underset{\cdot}{2} \mid \underset{\cdot}{3} \times \underset{\cdot}{5} \mid \underset{\cdot}{3} \times 7 \mid \underset{\cdot}{2} \times \underset{\cdot}{7}$. Werden nun hier die mit Puncten bezeichnetrn Factoren weggelassen, so bleibt $2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 2 \times 7 = 840$ als der kleinste Hauptnenner aller Brüche. Daher wird der erste Zähler $= \frac{840}{12} \times 5 = 350$; der 2te Zähler $= \frac{840}{10} \times 3 = 84 \times 3 = 252$; der 3te Zählen $= \frac{840}{8} \times 7 = \frac{5880}{8} = 735$; der 4te $= \frac{840}{15} \times 11 = 56 \times 11 = 616$; der 5te $= \frac{840}{21} \times 4 = 160$ und der 6te $= \frac{840}{14} \times 1 = 60$. Daher sind die sechs neuen Brüche diese: $\frac{350}{840}$, $\frac{252}{840}$, $\frac{735}{840}$, $\frac{616}{840}$, $\frac{160}{840}$ und $\frac{60}{840}$.

§. 147. Aufgabe. Wenn mehrere Brüche gegeben sind, zu bestimmen, wie sie in Rücksicht ihrer Größe aufeinander folgen.

Auflösung. Wenn die gegebenen Brüche schon einerley Nenner haben, so folgen sie in Rücksicht ihrer Größe aufeinander, wie ihre Zähler. Haben sie aber verschiedene Nenner, so bringe man sie zuvor (nach §. 144.) auf gleiche Benennung, wo sich nun die Brüche in ihrer Größe ebenfalls nach den Zählern richten.

Beweis. Brüche sind Zahlen, (§. 116.) welche aus Einheiten bestehen, deren Art der Nenner (§. 117.) und deren Menge der Zähler (§. 117.) anzeigt. Haben nun mehrere Brüche einerley Nenner, so sind die ihre Einheiten Theile eines auf gleiche Art getheilten Ganzen, und jener Bruch muß größer seyn, welcher mehr solcher Theile enthält, d. h. dessen Zähler der größere ist. Man fragt z. B. wie die Brüche $\frac{8}{11}$, $\frac{5}{9}$, $\frac{7}{12}$ auf einander folgen. Nach (§.144.) ist der erste $\frac{8}{11} = \frac{8 \times 9 \times 12}{11 \times 9 \times 12}$

$= \frac{864}{1188}$; $\frac{5}{9} = \frac{5 \times 11 \times 12}{9 \times 11 \times 12} = \frac{660}{1188}$; $\frac{7}{12} = \frac{7 \times 11 \times 9}{12 \times 11 \times 9}$ $= \frac{693}{1188}$. Nun ist aber von den letztern drey Brüchen $\frac{864}{1188}$ der größte, $\frac{693}{1188}$ der folgende, und $\frac{660}{1188}$ der kleinste; folglich stehen die gegebenen Brüche in dieser Ordnung $\frac{8}{11}$, $\frac{7}{12}$, $\frac{5}{9}$ nacheinander.

§. 148. Anmerkung. Weil die Brüche Zahlen sind (§. 116.) so müssen auch alle in §. 24. angezeigte Veränderungen bey Brüchen Statt haben; d. h. es gibt eine Addition, eine Subtraction, eine Multiplication, und Division in Brüchen.

I. Die Addition.

§. 149. Grundsatz. Brüche, welche addirt werden sollen, müssen gleichartig seyn, denn sie sind Zahlen (§. 27, I.). Brüche sind aber von einerley Art, wenn sie gleiche Nenner, und ungleichartig, wenn sie verschiedene Nenner haben, weil der Nenner die Art der Theile anzeigt (§. 117.). Folglich müssen die zu addirenden Brüche einerley Nenner haben.

§. 150. Aufgabe. Mehrere gegebene Brüche zusammen zu addiren.

Auflösung. I. Wenn alle zu addirende Brüche schon einerley Nenner haben, so addire man ihre Zähler, und setze unter ihre Summe den gemeinschaftlichen Nenner einmal.

II. Haben hingegen die gegebenen Brüche verschiedene Nenner, so bringe man sie zuerst (nach §. 144) auf einerley Benennung, und verfahre nun nach I.

Beweis. Wenn die gegebenen Brüche einerley Nenner haben, so drücken ihre Zähler die Mengen der

vorhandenen Einheiten aus. Daher wird die Summe dieser Einheiten gefunden, wenn man die Zähler aller Brüche addirt. Haben dieselbe aber verschiedene Nenner, so müssen sie (wegen §. 147.) zuerst unter einerley Nenner gebracht, und hernach ihre Zähler wieder addirt werden. Weil aber durch die Addition gleichartiger Dinge ihre Art nicht verändert wird, so darf der gemeinschaftliche Nenner nur einmal gesetzt werden.

Beyspiel. Soll man die Brüche $\frac{5}{8}$, $\frac{7}{9}$, $\frac{3}{5}$ zusammenaddiren, so geben dieselbe (nach §. 144.) folgende: $\frac{225}{360}$, $\frac{280}{360}$ und $\frac{216}{360}$. Folglich ist nun $\frac{5}{8} + \frac{7}{9} + \frac{3}{5} = \frac{225}{360} + \frac{280}{360} + \frac{216}{360} = \frac{225 + 280 + 216}{360} = \frac{721}{360} = 2\,\frac{1}{360}$ — Die Brüche $\frac{18}{29}$ und $\frac{46}{97}$ geben (nach §. 112.) $\frac{1746}{2813}$ und $\frac{1334}{2813}$, folglich $\frac{18}{29} + \frac{46}{97} = \frac{1746}{2813} + \frac{1334}{2813} = \frac{3080}{2813} = 1\,\frac{267}{2813}$.

§. 151. Zusatz. Sollte man Ganze nebst Brüchen zu Ganzen und Brüchen addiren, so kann dieses auf doppelte Art geschehen.

I. Indem man die Brüche einrichtet, d. h. eine jede ganze Zahl, woran ein Bruch hängt, in einen andern Bruch verwandelt, welcher so groß ist, als diese ganze Zahl nebst dem angehängten Bruche. Dieß geschieht aber (nach §. 124.) dadurch, daß man jede ganze Zahl mit dem Nenner des an ihr angehängten Bruches multiplicirt, zum Producte den Zähler dieses Bruchs addirt, und unter diese Summe jenen Nenner setzt. Hierdurch bekömmt man einen einzigen Bruch, der so groß ist, als die gegebene ganze Zahl nebst ihrem Bruche. — Auf ähnliche Art richte man alle übrigen Brüche ein, so findet sich ihre Summe

(nach §. 116.). Z. B. $7\frac{2}{3} + 9\frac{6}{7} + 3\frac{1}{4} = \frac{7 \times 3}{3} + \frac{2}{3} + \frac{9 \times 7}{7} + \frac{6}{7} + \frac{3 \times 4}{4} + \frac{1}{4} = \frac{21}{3} + \frac{2}{3} + \frac{63}{7} + \frac{6}{7} + \frac{12}{4} + \frac{1}{4} = \frac{21 + 2}{3} + \frac{63 + 6}{7} + \frac{12 + 1}{4} = \frac{23}{3} + \frac{69}{7} + \frac{13}{4}$, wo diese Brüche nun nach §. 150, II. summirt werden. — Oder auf eine kürzere Art, indem man

II. Die gegebenen ganzen Zahlen zuerst, und hernach auch die sich bey ihnen befindlichen Brüche (nach §. 150) in eine Summe bringt, und die aus den beyden Brüchen allenfalls entstehenden Ganzen dazu zählt. Z. B. $12\frac{4}{9} + 7\frac{5}{8} = 12 + 7 + \frac{4}{9} + \frac{5}{8} = 19 + \frac{32}{72} + \frac{45}{72} = 19 + \frac{77}{72} = 19 + 1 + \frac{5}{72} = 20\frac{5}{72}$.

§. 152. Anmerkung. Am Schlusse dieser Lehre von der Addition in gemeinen Brüchen wird man sich leicht überzeugen, wieviel bequemer eben diese Rechnungsart in Decimalbrüchen (§. 98.) sey. Will man diese Bequemlichkeit genießen, so müßen die gemeinen Brüche in zehntheilige verwandelt werden können, wozu folgende Aufgabe dient.

§. 153. Aufgabe. Einen gegebenen gemeinen Bruch in einen Decimalbruch zu verwandeln.

Auflösung. I. Wenn der gegebene Bruch ein ächter ist, so enthält er keine Ganze. Um seine Zehntel zu finden, setze man zur Rechten des Zählers eine Nulle und dividire mit dem Nenner in dieses Zehnfache des Zählers. Bleibt kein Rest so ist der gegebene Bruch genau in Zehntel ausgedrückt. Entsteht aber ein Rest, so hänge man wieder eine Nulle an ihn, dividire abermals mit dem Nenner in die erhaltene Zahl, so ist der Quotient die Vielheit der im Bruche enthaltenen Hundertte. Auf diese Weise fahre man so lange fort, bis die Divi=

sion sich entweder einmal abschließet, oder bis man so kleine Decimaltheilchen erhalten hat, daß sie der Schärfe der Rechnung genügen. Siehe Beyspiele I, II, III u. IV.

II. Ist aber der angegebene Bruch ein unächter, so bestimme man durch die Division mit dessen Nenner in den Zähler zuerst die Ganzen (§. 123.) und sodann (nach I) die noch dazu gehörigen Decimalbruchtheile. Siehe die Beyspiele V und VI.

Beweis. Die Richtigkeit des Verfahrens beruht theils auf §. 89. theils auf §. 123.

Beyspiele.

I. $\frac{3}{5} = 0, \frac{30}{5} = 0, 6.$

II. $\frac{7}{8} = 0, \frac{7000}{8} = 0, 875.$

III. $\frac{5}{12} = 0, \frac{5000000\ldots}{12} = 0, 416666\ldots.$

IV. $\frac{5}{7} = 0, \frac{50000000\ldots}{7} = 0, 71428571\ldots.$

V. $\frac{124}{9} = 13 + \frac{7}{9}$. Allein $\frac{7}{9} = 0, \frac{70000\ldots}{9} = 0, 7777\ldots$ Daher $\frac{124}{9} = 13, 7777\ldots.$

VI. $\frac{423}{8} = 52\frac{7}{8} = 52, 875.$

§. 154. Zusatz. Wenn die zu addirenden Brüche folgende sind; $\frac{3}{8}$, $\frac{17}{9}$, $\frac{3}{11}$, $\frac{12}{7}$ und $\frac{1}{4}$, so sage man

$\frac{3}{8} = 0, 375$

$\frac{17}{9} = 1, 8888888\ldots$

$\frac{3}{11} = 0, 2727272\ldots$

$\frac{12}{7} = 1, 7142857\ldots$

$\frac{1}{4} = 0, 25$

4, 5009017 .. Summe,

welche bis auf die Stelle der Millionte l genau ist.

Um sich von der Kürze dieser Rechnung zu überzeugen, addire man die gegebenen Brüche nach der gewöhnlichen Vorschrift. Verwandelt man nun den als Summe gefundenen Bruch in einen Decimalbruch, so muß man 4,500901 . . . . erhalten. Diese Rechnung ist eine sehr lehrreiche Uebung für die Anfänger.

II. Die Subtraction.

§. 155. Grundsatz. Brüche, welche von einander abgezogen werden sollen, müssen gleichartig seyn; denn Brüche sind Zahlen (§. 27, I.) Die Gleichartigkeit der Brüche hängt aber von der Gleichheit ihrer Nenner ab. (§. 115.) Folglich müssen die zu subtrahirenden Brüche einerley Nenner haben.

§. 156. Aufgabe. Einen kleiner Bruch von einem größern zu subtrahiren.

Auflösung. Man ziehe, nachdem die beyden Brüche unter einerley Nenner gebracht worden sind (§. 142,) den kleinern Zähler von dem größern ab und setze unter den Rest den gemeinschaftlichen Nenner.

Beweis. Der Unterschied der beyden Brüche besteht in dem Unterschiede ihrer Einheiten. Nun drükken aber die Zähler der Brüche die Mengen dieser Einheiten aus (§. 115.). Folglich ist der Unterschied der Zähler auch der Unterschied der Brüche selbst. Um aber zugleich die Art der Theile zu wissen, muß der gemeinschaftliche Nenner wieder darunter gesetzt werden, weil durch das Abziehen die Art der Brüche nicht verändert werden kann.

Beyspiele.

$\frac{12}{19} - \frac{7}{15} = \frac{12 \times 15}{19 \times 15} - \frac{7 \times 19}{15 \times 19} = \frac{12 \times 15 - 7 \times 19}{15 \times 19}$
$= \frac{180 - 133}{285} = \frac{47}{285}$. Ferner $\frac{8}{19} - \frac{15}{47} = \frac{8 \times 47}{19 \times 47}$
$- \frac{15 \times 19}{47 \times 19} = \frac{8 \times 47 - 15 \times 19}{47 \times 19} = \frac{376 - 285}{893} =$
$\frac{191}{893}$.

§. 157. Aufgabe. Einen Bruch von einer ganzen Zahl abzuziehen.

Auflösung. Man multiplicire den Nenner des gegebenen Bruchs mit der ganzen Zahl, wovon der Abzug geschehen soll, nehme von diesem Producte den Zähler desselben hinweg, und setze unter den Unterschied den Nenner, so ist der hierdurch entstehende Bruch, woraus man nöthigen Falles die Ganzen ziehen muß, die gesuchte Differenz.

Beweis. Durch das Verfahren in der Auflösung wird (nach §. 124.) die ganze Zahl in einen Bruch verwandelt, welcher mit dem gegebenen einerley Nenner hat. Wenn aber die beyden Brüche einerley Nenner haben, so darf man nur ihre Zähler von einander abziehen. (§. 156.) Folglich ist die Auflösung richtig.

Beyspiele. Man soll von 18 den Bruch $\frac{14}{5}$ abziehen. Hier ist $18 - \frac{14}{5} = \frac{18 \times 5}{5} - \frac{14}{5} =$
$\frac{18 \times 5 - 14}{5} = \frac{90 - 14}{5} = \frac{76}{5} = 15\frac{1}{5}$. Ferner 28
$- \frac{30}{7} = \frac{28 \times 7}{7} - \frac{30}{7} = \frac{28 \times 7 - 30}{7} = \frac{196 - 30}{7}$
$= \frac{166}{7} = 23\frac{5}{7}$.

§. 158. Anmerkung. Ist der abzuziehende Bruch ein ächter (§. 120.), so ist die Auflösung kürzer, wenn man

von der ganzen Zahl eine Einheit wegnimmt, dieselbe in einen Bruch, welcher mit dem gegebenen einerley Nenner hat, verwandelt §. 124. beyde Brüche nun von einander abzieht, und den Rest der um 1 verminderten ganzen Zahl hinzusetzt. So ist z. B.

$15 - \frac{6}{17} = 14 + 1 - \frac{6}{17} = 14 + \frac{17}{17} - \frac{6}{17} = 14 + \frac{17 - 6}{17} = 14 + \frac{11}{17}$. Oder $26 - \frac{12}{47} = 25 + 1 - \frac{12}{47} = 25 + \frac{47}{47} - \frac{12}{47} = 25 + \frac{47 - 12}{47} = 25 + \frac{35}{47}$.

§. 159. Aufgabe. Eine ganze Zahl nebst einem Bruche von einer ganzen Zahl und einem Bruche abzuziehen.

Auflösung. Das allgemeine Verfahren zur Auflösung ist, daß man die Brüche zuerst einrichtet, (§. 151, I.) sie hernach unter einerley Benennung bringt, (§. 142.) und endlich den Abzug (nach §. 156) verrichtet.

Beweis. Die Richtigkeit dieses Verfahrens beruht auf den §§. 154, I; 142 u. 156.

Beyspiele.

Man soll von $12\frac{4}{9}$ abziehen $8\frac{6}{13}$. Hier ist $12\frac{4}{9} - 8\frac{6}{13} = \frac{112}{9} - \frac{110}{13} = \frac{112 \times 13}{9 \times 13} - \frac{110 \times 9}{13 \times 9} = \frac{112 \times 13 - 110 \times 9}{9 \times 13} = \frac{1456 - 990}{117} = \frac{466}{117} = 3\frac{115}{117}$. Desgleichen ist $5\frac{2}{3} - 2\frac{5}{7} = \frac{17}{3} - \frac{19}{7} = \frac{119 - 57}{21} = \frac{62}{21} = 2\frac{20}{21}$.

§ 160. Anmerkung. Hat der Fall Statt, daß der Bruch an der abzuziehenden Zahl kleiner, als jener der

andern ist, wovon der Abzug geschehen soll, so ziehe man die Ganzen von den Ganzen, und auch die Brüche von einander ab. Z. B. $18\frac{3}{4} - 12\frac{1}{2} = 18 - 12 + (\frac{3}{4} - \frac{1}{2}) = 6 + (\frac{3}{4} - \frac{1}{2}) = 6 + \frac{6-4}{8} = 6 + \frac{2}{8} = 6 + \frac{1}{4}$.

§. 161. Anmerkung. Auch die Subtraction in gemeinen Brüchen kann mit mehr Bequemlichkeit ausgeführt werden, wenn man sie zuerst in Decimalbrüche verwandelt, und diese sodann von einander abzieht. Folgende Beyspiele erläutern dieses:

I. $\frac{7}{12} - \frac{4}{15} = 0,58333\ldots - 0,26666\ldots = 0,32667\ldots$

II. $8 - \frac{157}{28} = 8 - 5,60716\ldots = 2,39284\ldots$

III. $216\frac{8}{11} - 87\frac{7}{15} = 216,727272 - 87,466666 = 129,260606$

Zur Uebung kann diese Subtraction in gewöhnlichen Brüchen verrichtet und sodann der erhaltene Rest wieder in einen Decimalbruch verwandelt werden, welcher mit dem vorhin gefundenen zum Wenigsten bis auf die vorletzte Ziffer übereinstimmen muß.

III. Die Multiplication.

§. 162. Aufgabe. Einen ächten Bruch mit einem ächten Bruche zu multipliciren.

Auflösung. Man multiplicire die beyden Zähler und auch die beyden Nenner miteinander. Jenes Product gibt den Zähler, dieses den Nenner des Products.

Beweis. Einen Bruch mit einem Bruche multipliciren, heißt so viel, als denselben mit einem Quo-

tienten, d. h. mit einer Zahl multipliciren, welche durch eine andere dividirt ist (§. 122, I). Multiplicirt man nun den Bruch mit dieser ersten Zahl allein, so wird das Product offenbar so vielmal zu groß werden, als wie viele Einheiten die andere Zahl enthält. Daher muß man, um das richtige Factum zu bekommen, jenes Product wieder eben so vielmal kleiner machen, welches geschieht, wenn dasselbe durch diese andere Zahl dividirt wird. Nun geschieht aber die erste Multiplication durch die Vermehrung der beyden Zähler (§. 125.) und die letztere Division durch die Multiplication der beyden Nenner (§. 126.). Daher ist die Auflösung gerechtfertigt.

Anderer Beweis. Zwey ächte Brüche multipliciren, heißt (nach §. 30, II) so viel, als den einen so oft nehmen als der andere die Einheit enthält. Nun enthält aber der Multiplicator nur Theile der Einheit; folglich ist diese Multiplication so viel, als von dem Multiplicanden ein solches Stück nehmen, als der Multiplicator es anzeigt Um dieses zu finden, muß der Multiplicand in so viele Theile eingetheilt werden, als der Nenner des Multiplicators es fodert, und dann müssen so viele dieser Theil genommen werden, als der Zähler es vorschreibt. Nun geschieht aber jenes durch die Multiplication des Nenners in den Nenner, und dieses durch die Multiplication der beyden Zähler in einander (§§. 125, 126.) Folglich ist die Auflösung richtig. So heißt z. B. $\frac{5}{6}$ mit $\frac{3}{4}$ multipliciren soviel, als von $\frac{5}{6}$ den $\frac{3}{4}$ Theil, d. h. von $\frac{5}{6}$ den vierten Theil 3mal nehmen. Nun ist aber der 4te Theil von $\frac{5}{6} = \frac{5}{6 \times 4}$

(§. 126.) und dieses 3mal genommen gibt $\frac{5 \times 3}{6 \times 4}$ (§. 125.) Folglich $\frac{5}{6} \times \frac{3}{4} = \frac{5 \times 3}{6 \times 4} = \frac{15}{24} = \frac{5}{8}$.

Beyspiele.

$\frac{7}{9} \times \frac{5}{6} = \frac{7 \times 5}{9 \times 6} = \frac{35}{54}$. Ferner $\frac{11}{29} \times \frac{15}{37} = \frac{11 \times 15}{29 \times 37} = \frac{165}{1073}$.

§. 163. Zusatz. Sollten zwey uneigentliche Brüche unter sich, oder sollte ein uneigentlicher Bruch mit einem eigentlichen multiplicirt werden, so ist die Auflösung die nämliche, wie im vor. §, indem der dortige Beweis hier wieder seine vollkommene Anwendung findet. Z. B.

$\frac{17}{4} \times \frac{18}{5} = \frac{17 \times 18}{14 \times 5} = \frac{306}{20} = 15\ \frac{6}{20} = 15\ \frac{3}{10}$.

Oder $\frac{25}{9} \times \frac{5}{8} = \frac{25 \times 5}{9 \times 8} = \frac{125}{72} = 1\ \frac{53}{72}$.

§. 164. Zusatz. Sind mehr als zwey Brüche gegeben, aus welchen ein Product gemacht werden soll, so ist das Factum ein Bruch, dessen Zähler ein Product aller Zähler, und dessen Nenner ein Product aller Nenner ist. Z. B. $\frac{7}{9} \times \frac{4}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{7 \times 4 \times 2}{9 \times 5 \times 3} = \frac{56}{135}$. Denn $\frac{7}{9} \times \frac{4}{5} \times \frac{2}{3} = (\frac{7}{9} \times \frac{4}{5}) \times \frac{2}{3}$. Allein $\frac{7}{9} \times \frac{4}{5} = \frac{28}{45}$; folglich $(\frac{7}{9} \times \frac{4}{5}) \times \frac{2}{3} = \frac{28}{45} \times \frac{2}{3} = \frac{56}{135}$.

§. 165. Zusatz. Ein Product aus zwey Brüchen, deren einer ein ächter ist, wird kleiner als der andere Bruch. Denn man nimmt nur einen Theil von demselben (§. 161.) z. B. $\frac{15}{8} \times \frac{3}{4} = \frac{45}{32} = 1\ \frac{13}{32}$. Allein $\frac{15}{8} = 1\ \frac{7}{8} = 1\ \frac{28}{32}$; folglich $\frac{45}{32}$ kleiner als $\frac{15}{8}$. — Ist der andere Factor auch ein ächter Bruch, so wird

das Product kleiner als jeder der beyden Factoren. Denn von jedem wird durch die Multiplication nur ein Theil genommen. Z. B. $\frac{7}{8} \times \frac{3}{5} = \frac{21}{40}$, und dieses Product ist kleiner als jeder der einzelnen Factoren. Denn $\frac{7}{8} = \frac{35}{40}$ und $\frac{3}{5} = \frac{24}{40}$.

§. 166. Zusatz. Einen Bruch mit einer ganzen Zahl zu multipliciren, lehrt §. 125. und §. 131. Sollte umgekehrt eine ganze Zahl durch einen Bruch multiplicirt werden, so müßte der Zähler des Bruches mit dieser Zahl multiplicirt und der Nenner unter das Product gesetzt werden. Denn diese Zahl mit einem Bruche multipliciren heißt, den so vielten Theil derselben nehmen, als der Bruch es anzeigt, und nun bezieht sich der Beweis wieder auf §. 162. So heißt $8 \times \frac{5}{9}$ nichts anders, als den 9ten Theil von 8 fünfmal nehmen. Daher ist $8 \times \frac{5}{9} = \frac{8 \times 5}{9} = \frac{40}{9} = 4\frac{4}{9}$.

§. 167. Aufgabe. Ganze und Brüche mit Ganzen und Brüchen zu multipliciren.

Auflösung. Man richte die gegebenen Brüche ein (§. 154, I.), und vollziehe nun die Multiplication nach §. 163.

Beweis. Diese Vorschrift beruht offenbar auf den §§. 154, I. und 163.

Beyspiele.

$8\frac{7}{11} \times 6\frac{3}{7} = \frac{95}{11} \times \frac{45}{7} = \frac{95 \times 45}{11 \times 7} = \frac{4275}{77} =$ $55\frac{40}{77}$. Oder $10\frac{6}{7} \times 9\frac{7}{9} = \frac{76}{7} \times \frac{88}{9} = \frac{76 \times 88}{7 \times 9}$ $= \frac{6688}{63} = 106\frac{10}{63}$.

§. 168. Anmerkung. Nebst der obigen Auflösung vor. §. gibt es noch eine andere, welche sich darauf gründet, daß das Product aus zwey Factoren, deren jeder aus mehreren Theilen besteht, erhalten wird, wenn man jeden einzelnen Theil des einen Factors mit jedem Theile des andern Factors multiplicirt, und hernach sämmtliche Theil-Facta zusammen addirt. Z. B. $(8 + \frac{2}{3}) \times (6 + \frac{8}{9}) = 8 \times 6 + \frac{2}{3} \times 6 + 8 \times \frac{8}{9} + \frac{2}{3} \times \frac{8}{9} = 48 + \frac{12}{3} + \frac{64}{9} + \frac{16}{27} = 48 + 4 + \frac{192}{27} + \frac{16}{27} = 52 + \frac{208}{27} = 52 + 7\,\frac{19}{27} = 59\,\frac{19}{27}$.

§. 169. Anmerkung. Zu der Multiplication der ganzen Zahlen und Brüche gehören auch jene Fälle, wo man den Bruch einer gegebenen höhern Werthart in Einheiten einer niedrigern Art verwandeln soll.

I. Man verlangt zu wissen, wie viele Kreuzer $\frac{7}{9}$ eines Gulden betragen. Weil 1 Gulden aus 60 Kr. besteht, so ist offenbar $\frac{7}{9}$ des Gulden so viel als $\frac{7 \times 60}{9}$ Kr. Allein $\frac{7 \times 60}{9} = \frac{420}{9} = 46\,\frac{6}{9} = 46\,\frac{2}{3}$ Kr. Aber, wie viele Pfennige machen diese $\frac{2}{3}$ Kr? Weil 4 Pf. einen Kr. betragen, so ist $\frac{2}{3}$ Kr. $= \frac{2 \times 4}{3}$ Pf. $= \frac{8}{3} = 2\,\frac{2}{3}$ Pf. Folglich ist $\frac{7}{9}$ Guld. = 46 Kr. nebst 2 und $\frac{2}{3}$ Pf.

II. Wie viele Pfunde betragen $\frac{14}{25}$ eines Centners? Hier ist $\frac{14}{25}$ Cent. $= \frac{14 \times 100}{25}$ ℔ $= \frac{1400}{25}$ ℔ $= 56$ ℔.

III. Wie viele Lothe geben $\frac{28}{39}$ eines Pfundes? Die Rechnung gibt $\frac{28}{39}$ Pf. $= \frac{28 \times 32}{39}$ Lothe $= \frac{896}{39} = 22\,\frac{38}{39}$ Lothe. $= 22$ Lothe $\frac{38 \times 4}{39}$ Quent. $= 22$ Loth $\frac{152}{39}$ Quent. $= 22$ Lothe $3\,\frac{35}{39}$ Quentchen.

Nach diesen Mustern werden alle ähnliche Aufgaben behandelt.

§. 170. Anmerkung. Auch lassen sich die in dem vor. §. gefundenen Brüche sehr leicht in Decimaltheilen aus-

drücken. Da $\frac{7}{9}$ des Gulden soviel als 46 $\frac{2}{3}$ Kreuzer betragen (§ 169, I.) so ist auch $\frac{7}{9}$ fl. = 46,666 . . . Kreuzer. — Eben so betragen (nach II) $\frac{28}{39}$ des Pfundes soviel als 22 $\frac{38}{39}$ Lothe. Dieses gibt nun auch $\frac{28}{39}$ ℔ = 22,974 . . . Lothe u. s. f.

§. 171. Anmerkung. Auch könnte man hier fragen, wieviel eine bestimmte Menge einer niedern Werthart in Decimaltheilchen der gegebenen höhern betrage; z. B. wieviele Zehntheile des Gulden sind 7 Kreuzer? — Da 1. fl = 60 Kr. so ist 1 Kr = $\frac{1}{60}$ = 0,01666 . . fl. Daher sind 7 Kr = 0,01666 × 7 = 0,11662 . . Gulden.

Ferner: Wieviele Decimaltheile des Pfundes sind 18 Lothe? — Da 1 ℔ = 32 Lothe, so ist 1 Loth = $\frac{1}{32}$ = 0,03125 Pfunde (ohne Rest). Folglich sind diese 18 Lothe = 0,03125 × 18 oder 0,5625 des Pfundes. Nach diesen Mustern können alle ähnliche Fälle behandelt werden.

IV. Die Division.

§. 172. Lehrsatz. Der Quotient zweyer Brüche, welche einerley Nenner haben, ist der Quotient, welcher herauskömmt, wenn der Zähler des Dividenden durch den Zähler des Divisors dividirt wird.

Beweis. Der Quotient ist eine Zahl, welche ausdrückt wie vielmal der Dividend größer als der Divisor ist (§. 36, I.) Nun zeigen aber die Zähler der Brüche die Mengen ihrer Einheiten an, und diese Einheiten sind auch, bey gleichen Nennern, von der nämlichen Art. Daher wird der eine Bruch so vielmal größer als der andere seyn, wie vielmal der Zähler des einen größer, als der Zähler des andern ist. Folglich ist der Quotient der Zähler der Quotient der Brüche selbst.

Beyspiele. $\frac{63}{7} : \frac{9}{7} = 63 : 9 = 7$, d. h. der Bruch $\frac{63}{7}$ ist 7mal größer, als $\frac{9}{7}$. Und in der That ist auch $\frac{9}{7} \times 7 = \frac{63}{7}$ (§. 125.). Ferner ist $\frac{8}{17} : \frac{4}{17} = 8 : 4 = 2$, oder $\frac{8}{17}$ ist noch einmal so groß als $\frac{4}{17}$, weil jener Bruch noch einmal so viele Einheiten von der nämlichen Art enthält, als dieser.

§. 173. Aufgabe. Zwey gegebene ungleichartige Brüche zu dividiren.

Auflösung. Man setze in dem Divisor den Nenner in die Stelle des Zählers, den Zähler an die Stelle des Nenners, und multiplicire nun mit diesem umgekehrten Theilerbruche den Dividenden (nach §. 163.) so ist das hieraus entstehende Product der gesuchte Quotient.

Beweis. Wenn man die gegebenen Brüche (nach §. 142.) unter einerley Benennung bringt, so wird aus dem zu theilenden Bruche ein anderer, dessen Zähler ein Product aus seinem Zähler in den Nenner des Divisors, und dessen Nenner ein Factum aus seinem Nenner in den Nenner des Divisors wird. Desgleichen wird aus dem Divisorbruche ein neuer, dessen Zählen ein Product aus seinem Zähler in den Nenner des Dividenden, dessen Nenner hingegen wieder ein Factum der beyden Nenner ist. Der Quotient beyder Brüche ist nun (nach §. 172.) ein Quotient aus den beyden Zählern, und folglich ein Bruch, dessen Zähler ein Product aus dem Zähler des Dividenden in den Nenner des Divisors; dessen Nenner hingegen ein Factum aus dem Nenner des Dividenden in den Zähler des Divisors ist. Da aber Zähler und Nenner dieses Quotienten

Producte sind, welche aus zwey Factoren bestehen, so kann man sich denselben als ein Factum aus zwey Brüchen vorstellen, deren erster der gegebene Dividend selbst, der letztere hingegen der umgekehrte Divisor ist. Folglich ist der obige Lehrsatz bewiesen.

Erläuterung über diesen Beweis.

Wenn $\frac{8}{9}$ durch $\frac{2}{3}$ dividirt werden soll, so ist $\frac{8}{9} : \frac{2}{3} = \frac{8 \times 3}{9 \times 3} : \frac{2 \times 9}{3 \times 9} = 8 \times 3 : 2 \times 9 = \frac{8 \times 3}{2 \times 9} = \frac{8}{9} \times \frac{3}{2}$. Folglich heißt $\frac{8}{9}$ durch $\frac{2}{3}$ dividiren so viel, als $\frac{8}{9}$ mit $\frac{3}{2}$ multipliciren.

Beyspiele.

$\frac{17}{25} : \frac{5}{7} = \frac{17}{25} \times \frac{7}{5} = \frac{17 \times 7}{25 \times 5} = \frac{119}{125}$. Ferner $\frac{18}{39} : \frac{4}{7} = \frac{18}{39} \times \frac{7}{4} = \frac{18 \times 7}{39 \times 4} = \frac{126}{156} = \frac{21}{26}$.

§. 174. Zusatz. Wenn der Divisor ein ächter Bruch ist, so wird der Quotient größer als der Dividend. Denn bey einem ächten Bruche ist der Zähler kleiner als der Nenner (§. 119, II. §. 120.); folglich wird, bey der Umkehrung desselben (§. 173.) der versetzte Zähler größer als der Nenner; daher der Zähler des Dividenden mit einer größern Zahl multiplicirt, als dessen Nenner, und folglich das Product, oder der Quotient, größer (§§. 125—127.) Auch wird dieses schon daraus klar, daß hier der Divisor kleiner als 1 ist. Denn wäre er = 1, so würde der Quotient dem Dividenden gleich.

Beyspiele.

$\frac{17}{8} : \frac{2}{3} = \frac{17}{8} \times \frac{3}{2} = \frac{51}{16}$. Allein $\frac{17}{8} = \frac{17 \times 2}{8 \times 2} = \frac{34}{16}$ kleiner als $\frac{51}{16}$. Desgleichen $\frac{6}{7} : \frac{3}{5} = \frac{6}{7} \times \frac{5}{3} = \frac{30}{21}$, wo wieder $\frac{30}{21}$ größer als $\frac{6}{7}$ oder $\frac{6 \times 3}{7 \times 3} = \frac{18}{21}$ ist.

§. 175. Aufgabe. Eine gegebene ganze Zahl durch einen Bruch zu dividiren.

Auflösung. Man multiplicire die Zahl mit dem Nenner des Bruchs, und setze unter dieses Product den Zähler.

Beweis. Wenn die ganze Zahl in einen Bruch verwandelt werden sollte, der mit dem gegebenen einerley Nenner hat, so muß dieselbe mit diesem Nenner zugleich multiplicirt und dividirt werden (§. 124.). Auf diese Art sind aber zwey Brüche, welche einerley Nenner haben, miteinander zu dividiren. Dieses geschieht, indem (nach §. 172.) die beyden Zähler mit einander dividirt werden. Nun ist aber der Zähler des Dividenden ein Product aus der gegebenen Zahl in den Nenner des Bruchs, und der Zähler des Divisors der Zähler des Bruches; folglich auch der Quotient ein Bruch, dessen Zähler ein Factum aus der ganzen Zahl und dem Nenner, und dessen Nenner der Zähler des Divisors ist.

Erläuterung dieses Beweises.

$8 : \frac{3}{5} = \frac{8 \times 5}{5} : \frac{3}{5} = 8 \times 5 : 3 = \frac{8 \times 5}{3} = 8 \times \frac{5}{3}$.

Beyspiele.

$9 : \frac{6}{7} = 9 \times \frac{7}{6} = \frac{63}{6} = 10\frac{3}{6} = 10\frac{1}{2}$, wo (wegen §. 174.) der Quotient größer als der Dividend ist. Ferner $15 : \frac{3}{8} = 15 \times \frac{8}{3} = \frac{15 \times 8}{3} = \frac{120}{3} = 40$.

§. 176. Zusatz. Sollte ein Bruch durch eine ganze Zahl dividirt werden, so gibt es eine doppelte Auflösung dieser Aufgabe, indem man entweder mit dem Divisor in des Bruchs Zähler dividirt, oder dessen Nenner damit multiplicirt. Z. B. $\frac{8}{15} : 4 = \frac{8 : 4}{15} = \frac{2}{15}$. Oder $\frac{8}{15} : 4 = \frac{8}{4 \times 15} = \frac{8}{60} = \frac{2}{15}$, wo jenes Verfahren vor diesem gewöhnlich den Vorzug verdienet.

§. 177. Aufgabe. Ganze und Brüche durch ganze Zahlen und Brüche zu dividiren.

Auflösung. Man richte die Brüche nach §. 151, I. ein, und verrichte die Division nach §. 173.

Beweis. Die Richtigkeit dieses Verfahres beruht auf den in der Auflösungangeführten §§. 151, I. u. 173.

Beyspiele.

$8\frac{5}{7} : 5\frac{8}{9} = \frac{61}{7} : \frac{53}{9} = \frac{61}{7} \times \frac{9}{53} = \frac{549}{371} = 1\frac{178}{371}$. Ferner $12\frac{7}{8} : 7\frac{2}{3} = \frac{103}{8} : \frac{23}{3} = \frac{103}{8} \times \frac{3}{23} = \frac{309}{184} = 1\frac{125}{184}$.

Sechste Abtheilung.

Von den Verhältnissen und Proportionen.

§. 178. Erklärung. Wenn man sich zwey Zahlen denkt, so kann man dieselbe entweder für sich, als bestimmte Mengen von Einheiten betrachten; oder man kann die eine mit der andern vergleichen. Eine Vergleichung zweyer Zahlen in Rücksicht ihrer Größe, heißt ein Verhältniß; die Zahlen selbst, welche mit einander verglichen werden, nennt man die Glieder des Verhältnisses.

§. 179. Anmerkung. Wer sich die Zahlen 12 und 4 blos als Mengen von 12 und 4 Einheiten vorstellt, betrachtet diese Zahlen für sich, ohne sie mit einander zu vergleichen. Wenn man hingegen diese 12 und 4 in Bezug auf ihre wechselseitige Größe miteinander vergleicht, und so z. B. bestimmt, daß die 12 dreymal größer als die 4, oder daß 4 um 8 Einheiten kleiner als 12 sey, so heißt eine solche Vergleichung zwischen 12 und 8 ein Verhältniß, und die 12 und 8 werden die Glieder dieses Verhältnisses genennt.

§. 180. Erklärung. Diese Vergleichung zweyer Zahlen in Rücksicht ihrer Größe kann auf doppelte Art geschehen. Entweder untersucht man bey zwey gegebenen Zahlen, um wie viele Einheiten die eine größer als

die andere ist; oder man bestimmt, wie vielmal die eine größer als die andere ist. Ausser diesen beyden Arten, die zwey Zahlen zu vergleichen, läßt sich keine andere mehr denken. Im ersten Falle nennt man die Vergleichung ein arithmetisches; im letzten ein geometrisches Verhältniß.

§. 181. Erklärung. Das arithmetische Verhältniß (§. 180.) untersucht, um wie viele Einheiten eine Zahl größer als die andere ist. Dieses wird aber durch die Subtraction der kleinern Zahl von der größern bestimmt (§. 31.). Folglich ist das schicklichste Zeichen für das arithmetische Verhältniß jenes der Subtraction (in §. 50.) welches zwischen die beyden Glieder desselben gesetzt wird. So zeigt 18 — 12 das arithmetische Verhältniß der Zahlen 18 und 12 an. Die 18 und die 12 heissen dessen Glieder, und insbesondere wird 18 das erste oder vorhergehende; 12 aber das zweyte, oder nachfolgende Glied genennt. Da 18 — 12 = 6, so heißt diese dritte Zahl, um welche die beyden Glieder von einander unterschieden sind, der Unterschied oder die Differenz des Verhältnisses.

§. 182. Erklärung. Das geometrische Verhältniß (§. 180.) bestimmt, wie vielmal eine Zahl größer als die andere ist. Dieses erfährt man aber durch die Division (§. 21.) Folglich ist das natürlichste Zeichen des geometrischen Verhältnisses jenes der Division (in §. 63,) welches zwischen die beyden Glieder gesetzt wird. So bestimmt 24 : 8 das geometrische Verhältniß der Zahlen 24 und 8. Jene Zahl heißt das erste, oder vorhergehende; diese das zweyte

oder folgende Glied des Verhältnisses. Eine dritte Zahl, welche anzeigt, wie oft das zweyte Glied in dem ersten enthalten ist, wird der Exponent des Verhältnisses, oder der Verhältnißname genennt. So ist in 24 : 8 der Exponent = 3.

§. 183. Grundsätze. I. In jedem Verhältnisse müssen zwey Glieder seyn; ein vorhergehendes, und ein nachfolgendes. (§. 178.).

II. Die Glieder eines Verhältnisses müssen gleichartig seyn. Denn nur an gleichartigen Dingen kann man eine Differenz oder Quotienten finden (§. 33, I. §. 21.)

III. Die Größe eines Verhältnisses hängt nicht von der Größe der Glieder ab, woraus es besteht, sondern von der Größe des Unterschieds oder des Exponenten.

§. 184. Erklärung. Ein Verhältniß der Gleichheit ist ein solches, worin beyde Glieder einander gleich sind. Z. B. 8 — 8 = 0; 5 : 5 = 1. Sind die Glieder ungleich, so ist es ein Verhältniß der Ungleichheit, welches entweder vom Kleinern zum Größern, oder vom Größern zum Kleinern seyn kann, je nachdem das erste Glied kleiner als das zweyte, oder dieses kleiner als das erste ist. Z. B. 4 — 7; 14 — 9; 6 : 10; 20 : 5.

§. 185. Grundsätze,
für das arithmetische Verhältniß.

I. In dem arithmetischen Verhältnisse der Gleichheit (§. 184.) ist der Unterschied = 0.

II. In dem Verhältnisse der Ungleichheit vom Größern zum Kleinern (§. 184.) ist der Unterschied eine Zahl, welche entsteht, indem man das zweyte Glied von dem ersten abzieht. Z. B. 12 — 7 = 5.

III. Bey dem Verhältnisse der Ungleichheit vom Kleinern zum Größern ist die Differenz jene Zahl, welche herauskömmt, wenn das erste Glied vom zweyten weggenommen wird. Z. B. 6 — 10 = 4. Denn eine größere Zahl von der kleinern abzuziehen, kann erst weiter unten gelehrt werden.

IV. Bey dem Verhältnisse in II. ist daß erste Glied die Summe aus dem zweyten und dem Unterschiede (§. 33. II.) und das zweyte Glied der Unterschied des ersten und der Differenz (§. 51. I).

V. Bey dem Verhältnisse im III. ist das erste Glied die Differenz aus dem zweyten und dem Unterschiede (§. 51, I.); das zweyte Glied die Summe aus dem ersten und dem Unterschiede (§. 33, II.)

§. 186. Erklärung. Das arithmetische Verhältniß bestimmt, um wie viel ein Glied größer als das andere ist (§. 180, 181.) durch den Unterschied. Nun kann es geschehen, daß zwey Paare von Gliedern einerley Unterschiede unter sich haben. So ist z. B. 18 — 12 = 6, und 20 — 14 = 6, auch 35 — 29 = 6 u. s. f. Daher werden zwey arithmetische Verhältnisse gleich genennt, wenn sie von der nämlichen Ungleichheit (§. 184.) sind, und einerley Unterschiede haben. Um dieses zu bemerken, setzt man das Zeichen der Gleichheit zwischen die beyden Verhältnisse. So heißt:

18 — 12 = 20 — 14

soviel, als das arithmetische Verhältniß der Zahlen 18 und 12 ist dasselbige, wie jenes der Zahlen 20 und 14. Ein Verhältniß ist größer, als ein anderes, wenn es einen größern, und kleiner als dasselbe, wenn es einen kleinern Unterschied als dieses andere hat. Um es zu bezeichnen, setzt man $>$, das Zeichen des Größern, oder $<$, das Zeichen des Kleinern zwischen beyde Verhältnisse. Daher ist z. B. $15 - 8 > 13 - 10$, weil $15 - 8 = 7$; $13 - 10 = 3$ und $7 > 3$ ist. Ferner $18 - 14 < 8 - 3$; denn $18 - 14 = 4$, $8 - 3 = 5$ und $4 < 5$.

§. 187. Erklärung. Die Verbindung zweyer gleichen arihmetischen Verhältnisse (§. 186) heißt eine arithmetische Proportion. Z. B. $15 - 9 = 13 - 7$. Oder $3 - 11 = 7 - 15$. Das erste Glied des ersten, und das letzte des zweyten Verhältnisses *sind* die äussern; das zweyte Glied des ersten, und das erste des zweyten Verhältnisses, die innern oder mittlern Glieder der Proportion.

§. 188. Grundsätze. I. In jeder arithmetischen Proportion können nicht mehr und nicht weniger als vier Glieder seyn; denn sie besteht aus zwey Verhältnissen (§. 187.).

II. Auch verhält sich das erste Glied so zu dem zweyten, wie sich das dritte zu dem vierten verhält, d. h. um so Vieles das erste Glied größer, oder kleiner, als das zweyte ist, um eben so Vieles ist auch das dritte Glied größer oder kleiner als das vierte.

III. Desgleichen verhält sich auch das vierte Glied

so zu dem dritten, wie sich das zweyte Glied zu dem ersten verhält.

§. 189. Lehrsatz. In jeder arithmetischen Proportion ist die Summe der äussern Glieder so groß, als die Summe aus den beyden innern (§. 187.).

Beweis. Da hier drey Fälle möglich sind, so ist auch ein dreyfacher Beweis erfoderlich.

I. Wenn die gegebene Proportion aus zwey Verhältnissen der Gleichheit (§. 184.) besteht.

Hier ist das erste Glied so groß als das zweyte, und das dritte so groß als das vierte (§. 184.). Folglich besteht die Summe des ersten und vierten aus den nämlichen Zahlen, woraus die Summe des zweyten und dritten Gliedes zusammengesetzt ist. Folglich sind auch diese Summen gleich. Z. B. $8 - 8 = 3 - 3$. Hier ist offenbar $8 + 3$, oder die Summe aus den beyden äussern Gliedern, $= 8 + 3$, oder jener der beyden mittlern. Auch in $14 - 14 = 2 - 2$ hat man $14 + 2 = 14 + 2 = 16$.

II. Wenn die Proportion aus Verhältnissen besteht, welche ungleich vom Größern zum Kleinern (§. 184.) sind.

In diesem Falle ist nach §. 185, IV. das erste Glied die Summe aus dem zweyten und dem Unterschiede. Desgleichen ist das dritte Glied eine Summe aus dem vierten und dem Unterschiede. Werden nun, an Statt des ersten und dritten Gliedes, diese ihnen gleiche Summen in die Proportion gesetzt, und nun die Summe aus den äussern und innern Gliedern gemacht, so besteht jede derselben, in beyden Fällen, aus dem zweyten und

vierten Gliede und aus dem gemeinschaftlichen Unterschiede. Folglich sind diese Summen gleich (§. 27, III.).

Gesetzt die Proportion sey diese $12 - 8 = 6 - 2$, so ist, weil hier der gemeinschaftliche Unterschied $= 4$, das erste Glied $12 = 8 + 4$ (§. 185, IV.) und auch das dritte $6 = 2 + 4$ (§. 185, IV.) Folglich wird aus obiger Proportion diese $(8 + 4) - 8 = (2 + 4) - 2$. Allein nun ist die Summe der äussern Glieder $= 8 + 4 + 2 = 14 = 8 + 2 + 4$ der Summe der innern Glieder. Imgleichen ist in $20 - 12 = 14 - 6$ auch wieder $20 + 6 = 12 + 14 = 26$.

III. Wenn die gegebene Proportion aus Verhältnissen der Ungleichheit vom Kleinern zum Größern besteht. (§. 184.).

Hier ist das zweyte Glied nach §. 185, V. eine Summe aus dem ersten und dem Unterschiede. Eben so auch das vierte eine Summe aus dem Unterschiede und dem dritten Gliede. Setzt man nun, an Statt dieser Glieder, die ihnen gleichen Summen in die Proportion, und macht nachher in ihr die Summen aus den äußern und innern Gliedern, so müssen dieselbe gleich seyn, weil sie aus einerley Zahlen zusammengesetzt sind.

Die Proportion sey diese $5 - 18 = 9 - 22$, so ist hier 13 der gemeinschaftliche Unterschied, und $18 = 5 + 13$, auch $22 = 9 + 13$. Werden daher an Statt 18 und 22, diese Werthe in die Proportion gesetzt, so ist diese $5 - (5 + 13) = 9 - (9 + 13)$, worin die Summe der äussern Glieder $= 5 + 9 + 13 = 27 = 5 + 13 + 9$ oder der Summe der innern gleich ist. Desgleichen ist in $3 - 12 = 5 - 14$ auch $3 + 14 = 12 + 5 = 17$.

§. 190. Lehrsatz. Wenn man zu jedem Gliede eines arithmetischen Verhältnisses dieselbige Zahl addirt, oder von jedem Gliede die nämliche Zahl subtrahirt, so bleibt das Verhältniß in seinem Werthe unverändert.

Beweis. Der Werth eines arithmetischen Verhältnisses besteht in der Größe des Unterschiedes (§. 186.) seiner Glieder. Da aber irgend zwey Zahlen den nämlichen Unterschied behalten, wenn man einerley Zahl zu beyden addirt, oder von beyden hinwegnimmt, so bleibt auch das arithmetische Verhältniß jener Zahlen unverändert.

Beyspiele.

$12 - 7 = 5$. Daher auch $(12 + 3) - (7 + 3)$ oder $15 - 10 = 5$. Eben so ist auch $(12 - 2) - (7 - 2)$ $= 10 - 5 = 5$. Ferner $20 - 13 = 7$; folglich auch $(20 + 4) - (13 + 4)$ oder $24 - 17 = 7$. Desgleichen $(20 - 4) - (13 - 4)$ oder $16 - 9 = 7$.

§. 191. Zusatz. Daher läßt sich eine gegebene arithmetische Proportion auf vielfache Weise in der Größe ihrer Glieder verändern, ohne daß die Proportionalität gestört wird. z. B. $24 - 19 = 17 - 12$ wird verwandelt in folgende Proportionen:

$30 - 25 = 15 - 10$, oder $20 - 15 = 23 - 18$, oder $12 - 7 = 18 - 13$ u. s. f.

§. 192. Lehrsatz. In jeder arithmetischen Proportion verhält sich das erste Glied so zum dritten Gliede, wie sich das zweyte Glied zum vierten verhält.

Beweis. I. Wenn die Proportion aus Verhältnissen vom Größern zum Kleinern besteht, so ist das erste Glied eine Summe aus dem zweyten Gliede und dem Un-

terschiede (§. 185, IV) und das dritte Glied die Summe aus dem vierten und demselbigen Unterschiede. Folglich ist das erste Glied um eben so vieles größer als das zweyte, um wieviel das dritte Glied größer als das vierte ist. Daher erhellet die Wahrheit des Satzes aus §. 190.

II. Wenn die Proportion aus Verhältnissen vom Kleinern zum Größern besteht, so ist das zweyte Glied um so vieles größer als das erste, um wievieles das dritte Glied größer als das vierte ist (§. 185, V). Daher folgt der Satz wieder aus §. 190.

Beyspiele.

Es sey $18 - 11 = 15 - 8$, so ist auch $18 - 15 = 11 - 8$. Denn $18 - 11 = (11 + 7) - 11$ und $15 - 8 = (8 + 7) - 8$. Daher denn auch $(11 + 7) - (8 + 7) = 11 - 8$. Es sey ferner $5 - 12 = 8 - 15$, so ist auch $5 - 8 = 12 - 15$ u. s. f.

§. 193. Zusatz. Daher bleibt die Proportion ungestört, wenn man das erste und dritte, oder das zweyte und vierte Glied einer arithmetischen Proportion um dieselbige Zahl vermehrt oder vermindert.

§. 194. Zusatz. Wenn zwey gleiche Summen, deren jede aus zwey Zahlen besteht, gegeben sind, so kann man aus diesen vier Zahlen eine Proportion bilden, wovon das eine Paar die innern, das andere Paar die äussern Glieder bilden. Da z. B. $8 + 12 = 17 + 3$ ist, entstehen daraus die Proportionen:

$$12 - 3 = 17 - 8,$$

$$12 - 17 = 3 - 8,$$

$$8 - 3 = 17 - 12,$$

$$8 - 17 = 3 - 12.$$

Denn aus $8 + 12 = 17 + 3$ folgt, wenn man beyderseits erst 3 und sodann 8 abzieht, $12 - 3 = 17 - 8$, welches die erste obiger Proportionen ist, aus welcher die übrigen leicht herhorgehen.

§. 195. Zusatz. Wenn man die gleichnamigen Glieder mehrerer gegebenen arithmetischen Proportionen zusammen addirt, so bilden diese vier Summen wieder eine Proportion; z. B.

$$\begin{array}{l} 6 - 9 = 7 - 10 \\ 5 - 3 = 8 - 6, \text{ so ist} \\ \hline 11 - 12 = 15 - 16 \end{array}$$

Denn hier ist $6 + 10 = 9 + 7$ und auch $5 + 6 = 3 + 8$; folglich $(6 + 5) + (10 + 6) = (9 + 3) + (7 + 8)$, woraus (nach §. 194.) $(6 + 5) - (9 + 3) = (7 + 8) - (10 + 6)$ folget.

§. 196. Erklärung. Eine arithmetische stetige Proportion heißt jene, worin das zweyte Glied mit dem dritten das nämliche ist. Z. B. $12 - 8 = 8 - 4$; oder $5 - 14 = 14 - 23$; und man sagt, das zweyte oder dritte Glied sey die mittlere arithmetische Proportionalzahl zwischen den beyden äussern Gliedern.

§. 197. Zusatz. I. In der stetigen Proportion (§. 150.) ist eigentlich nur ein mittleres Glied gegeben, welches die Stelle der beyden innern vertritt.

II. Bey dieser stetigen Proportion ist die Summe der äussern Glieder so groß, als das mittlere doppelt. (§. 149.) Z. B. in $12 - 7 = 7 - 2$ ist $12 + 2 = 7 + 7 = 2 \times 7 = 14$. Ferner in $24 - 21 = 21$

— 18 hat man $24 + 18 = 21 + 21 = 2 \times 21 = 42$.

§. 198. Erklärung. Zu drey gegebenen Zahlen eine vierte arithmetische Proportionalzahl finden, heißt, diese drey Zahlen als Glieder einer arithmetischen Proportion ansehen und hieraus die Größe des fehlenden Gliedes, dessen Stelle in der Proportion angegeben seyn muß, bestimmen.

§. 199. Aufgabe. Zu drey gegebenen Zahlen eine vierte arithmetische Proportionalzahl (§. 198.) zu finden.

Auflösung. I. Wenn die zu findende Zahl, als Glied der Proportion, ein äusseres ist, so mache man eine Summe aus den beyden mittlern Gliedern, und ziehe hievon das vorhandene äussere ab, so ist der Unterschied das zu findende äussere Glied.

II. Ist hingegen die gesuchte Zahl, als Glied der Proportion, ein mittleres, so verfahre man gerade umgekehrt, summire die vorhandenen äussern Glieder, und nehme davon das eine mittlere hinweg, so ist die Differenz die zu findende Proportionalzahl.

Beweis. Die Summe der äussern Glieder ist so groß als die Summe aus den beyden mittlern (§. 189.) Wenn daher eine dieser Summen, und nebst ihr noch eine Zahl gegeben ist, welche mit einer zu findenden eben diese Summe ausmachen soll, so wird diese zu findende Zahl herauskommen müssen, wenn man von der bekannten Summe die angegebene Zahl hinwegnimmt. (§. 33, IV.) Man erhält folglich durch die Anweisung von (I.) und (II.) das zu findende vierte Glied.

Beyspiele. Zu I. Die drey gegebenen Zahlen, als das erste, zweyte und dritte Glied der Proportion, seyen 12, 8 und 7; man sucht das vierte Proportionalglied, welches man, um seine Stelle in der Proportion zu bemerken, mit x bezeichnen kann. Hier ist also

$12 - 8 = 7 - x$, und $x = 8 + 7 - 12 = 15 - 12 = 3$. Daher ist die ganze Proportion $12 - 8 = 7 - 3$. Ferner in $5 - 16 = 7 - x$ ist wieder $x = 16 + 7 - 5 = 23 - 5 = 18$, woraus die Proportion $5 - 16 = 7 - 18$ wird. Imgleichen in $x - 4 = 17 - 9$, ist wieder $x = 4 + 17 - 9 = 21 - 9 = 12$, und es ist auch $12 - 4 = 17 - 9$.

Zu II. Wenn $19 - x = 14 - 10$, so ist $x = 19 + 10 - 14 = 29 - 14 = 15$, und $19 - 15 = 14 - 10$. Desgleichen ist in $18 - 7 = x - 23$, $x = 18 + 23 - 7 = 41 - 7 = 34$, und $18 - 7 = 34 - 23$.

§. 200. Zusatz. Zu zwey gegebenen Zahlen die mittlere arithmetische Proportionalzahl (§. 196.) zu finden, nehme man die Hälfte der Summe von den beyden äussern Gliedern (§. 197, II. §. 199). Das erste Glied sey 8, das vierte 32, das mittlere x, so ist $8 - x = x - 32$, folglich $2x = 8 + 32$, und $x = \frac{8 + 32}{2} = \frac{40}{2} = 20$. Daher wird 20 die mittlere arithmetische Proportionalzahl zwischen 8 und 32 seyn, und es ist $8 - 20 = 20 - 32$. Ferner zwischen 17 und 4 ist das mittlere Glied $\frac{17 + 4}{2} = \frac{21}{2} = 10\frac{1}{2}$. Und die Proportion ist diese $17 - 10\frac{1}{2} = 10\frac{1}{2} - 4$, wo in beyden Verhältnissen $6\frac{1}{2}$ der gemeinschaftliche Unterschied ist.

§. 201. Grundsätze, für das geometrische Verhältniß.

I. In dem Verhältnisse der Gleichheit (§. 184.) ist der Exponent = 1.

II. In dem Verhältnisse der Ungleichheit vom Größern zum Kleinern (§. 184.) ist der Exponent eine ganze Zahl, und bisweilen auch eine ganze Zahl nebst einem Bruche. Z. B 24 : 3 = 8; 37 : 5 = 7 $\frac{2}{5}$.

III. In dem Verhältnisse der Ungleichheit vom Kleinern zum Größern (§. 184.) ist der Exponent ein eigentlicher Bruch (§. 122, II.) Z. B. 7 : 15 = $\frac{7}{15}$. Oder 12 : 48 = $\frac{12}{48}$ = $\frac{1}{4}$.

IV. In beyden Fällen von II. und III. ist jedesmal das erste Glied ein Product aus dem zweyten in den Exponenten. So ist in II. 24 = 8 × 3. Auch 37 = 5 × 7 $\frac{2}{5}$. Und in III. 7 = 15 × $\frac{7}{15}$. Ferner 12 = 48 × $\frac{1}{4}$.

V. In II. und III. ist immer das zweyte Glied der Quotient aus dem ersten als Dividend, und aus dem Exponenten als Divisor. Z. B. in II. ist 3 = 24 : 8; 5 = 37 : 7 $\frac{2}{5}$. Auch in III. ist 15 = 7 : $\frac{7}{15}$ und 48 = 12 : $\frac{12}{48}$.

§. 202. Erklärung. Das geometrische Verhältniß bestimmt, wie vielmal das erste Glied größer als das zweyte ist (§. 182.) durch den Exponenten des Verhältnisses. Es kann nun geschehen, daß bey zwey Paar Glieder dieser Exponent der nämliche ist. Denn es ist z. B. 32 : 4 = 8, auch 48 : 6 = 8; ferner 72 : 9 = 8 u. s. w. Daher werden zwey geometrische Verhältnisse gleich genennt, wenn sie einerley Ex-

ponenten haben. Um diese Gleichheit der Verhältnisse anzuzeigen, setzt man das Gleichheitszeichen zwischen beyde. So heißt z. B. 32 : 4 = 48 : 6 so viel, als das geometrische Verhältniß der Zahlen 32 und 4 ist eben so groß, als jenes der Zahlen 48 und 6. Auch wird ein Verhältniß größer als ein anderes genennt, wenn es einen größern; und kleiner, wenn es einen kleinern Exponenten hat. Diese Ungleichheit bezeichnet man durch die Zeichen des Größern und Kleinern (in §. 186.) So ist z. B. 56 : 7 > 30 : 6, denn im ersten Verhältnisse ist 8, im zweyten 5 (< 8) der Exponent. Auch ist 48 : 8 < 72 : 9, weil dort 6 und hier 8 (> 6) der Verhältnißname ist.

§. 203. Erklärung. Eine Verbindung von zwey gleichen geometrischen Verhältnissen (§. 202.) wird eine geometrische Proportion genennt z. B. 24 : 6 = 16 : 4, oder 8 : 56 = 3 : 21. Das erste Glied des ersten und das zweyte Glied des letzten Verhältnisses heißen die äussern, die beyden andern hingegen die innern oder mittlern Glieder.

§. 204. Grundsätze. I. Die geometrische Proportion besteht nur aus vier Gliedern. Denn sie ist aus zwey Verhältnissen zusammengesetzt.

II. Das erste Glid hat das nämliche Verhältniß zum zweyten Gliede, wie das dritte zum vierten, d. h. so vielmal das erste Glied größer oder kleiner als das zweyte ist, so vielmal ist auch das dritte Glied größer oder kleiner als das vierte.

§. 205. Lehrsatz. In jeder geometrischen Proportion ist das Product aus den äussern Gliedern (§. 204.) dem Producte aus den mittlern gleich.

Beweis. I. Wenn die Proportion aus zwey Verhältnissen der Gleichheit (§. 184.) besteht.

In diesem Falle werden die Producte aus den beyden äußern und innern Gliedern aus einerley Factoren zusammengesetzt, und müssen daher nothwendig gleich seyn, z. B. $8 : 8 = 25 : 25$, wo offenbar $8 \times 25 = 8 \times 25 = 200$. Desgleichen in $37 : 37 = 5 : 5$ ist $37 \times 5 = 37 \times 5 = 185$.

II. Wenn die beyden Verhältnisse von der nämlichen Ungleichheit (§. 184.) sind.

Hier ist immer (nach §. 201, IV.) das erste Glied eines jeden der beyden Verhältnisse ein Product aus dem zweyten Gliede in den Exponenten. Daher kann man auch an Statt dieser beyden ersten Glieder die ihnen gleichen Producte in die gegebene Proportion setzen. Es entsteht hierdurch eine neue Proportion, worin die Producte aus dem ersten Gliede in den Verhältnißnamen, und aus dem dritten in eben diesen Exponenten, das erste und dritte Glied; das zweyte und vierte hingegen die nämlichen Glieder, wie zuvor, sind. Macht man nun in dieser Proportion die verlangten Producte, so bestehen sie wieder aus einerley Factoren, und müssen daher gleich groß seyn.

So ist z. B. in $36 : 9 = 28 : 7$, die $36 = 9 \times 4$, und $28 = 7 \times 4$ (§. 201, IV.). Daher wird diese Proportion in nachstehende verwandelt: $9 \times 4 : 9 = 7 \times 4 : 7$, in welcher die Producte $9 \times 4 \times 7$ und $9 \times 7 \times 4$ gleich seyn müssen, weil sie einerley Factoren enthalten. (§. 30, IV.). Imgleichen ist in $5 : 45 = 8 : 72$ (nach §. 201, IV.) $5 = 45 \times \frac{5}{45}$ und $8 = 72 \times \frac{8}{72}$; oder, weil $\frac{5}{45} = \frac{8}{72} = \frac{1}{9}$, so ist auch

$5 = 45 \times \frac{1}{9}$, und $8 = 72 \times \frac{1}{9}$. Folglich hat man $45 \times \frac{1}{9} : 45 = 72 \times \frac{1}{9} : 72$, welches $45 \times \frac{1}{9} \times 72 = 45 \times 72 \times \frac{1}{9}$ gibt, weil wieder einerley Factoren einerley Factum hervorbringen.

§. 206. Erklärung. Eine stetige geometrische Proportion ist diejenige, in welcher die beyden mittlern Glieder einander gleich sind. Z. B. $64 : 8 = 8 : 1$. Oder $4 : 6 = 6 : 9$; und man sagt, eines der innern Glieder sey die mittlere geometrische Proportionalzahl zwischen den beyden äussern. So ist in den obigen Beyspielen 8 die mittlere geometrische Proportionalzahl zwischen 64 und 1; ferner 6 jene zwischen 4 und 9.

§. 207. Zusatz. I. In der stetigen geometrischen Proportion (§. 206.) ist daher nur ein mittleres Glied zu den beyden äußern, weil das nämliche zweymal vorkömmt.

II. Auch ist das Product der beyden äußern Gliedern einem Producte aus dem mittlern in sich selbst gleich.

§. 208. Lehrsatz. Wenn man die beyden Glieder eines geometrischen Verhältnisses mit der nämlichen dritten Zahl multiplicirt oder dividirt, so ist das Verhältniß der Producte oder Quotienten dem gegebenen Verhältnisse gleich.

Beweis. Der Werth eines geometrischen Verhältnisses wird durch den Exponenten bestimmt (§. 202.) Dieser wird aber gefunden, indem das erste Glied durch das zweyte dividirt wird (§. 182.). Ein jeder Quotient ist aber nichts anders als ein Bruch, dessen Zahler der Dividend und dessen Nenner der Divisor ist (§. 122,

II.). Daher läßt sich jedes geometrische Verhältniß durch einen Bruch ausdrücken, dessen Zähler und Nenner das erste und zweyte Glied des Verhältnisses gibt. Allein der Werth eines Bruchs wird (nach 127 u. 132.) nicht verändert, wenn sein Zähler und Nenner zugleich mit einerley dritten Zahl multiplicirt oder dividirt werden. Folglich bleibt auch das Verhältniß auf diese Art das nämliche.

Beyspiele.

$64 : 8 = 8$. Daher auch $\frac{64}{4} : \frac{8}{4} = 8$, oder $16 : 2 = 8$. Denn $64 : 8 = \frac{64}{8} = \frac{64 : 4}{8 : 4} = \frac{16}{2} = 16 : 2$. Ferner $36 : 9 = \frac{36}{3} : \frac{9}{3} = 12 : 3$. Denn $36 : 9 = \frac{36}{9}$, folglich $36 : 9 = \frac{36 : 3}{9 : 3} = \frac{12}{3} = 12 : 3$. Desgleichen ist $7 : 3 = \frac{7}{3} = 2\frac{1}{3}$, und $7 \times 2 : 3 \times 2 = 14 : 6 = \frac{14}{6} = 2\frac{2}{6} = 2\frac{1}{3}$. Denn $7 : 3 = \frac{7}{3} = \frac{7 \times 2}{3 \times 2} = \frac{14}{6} = 2\frac{1}{3}$.

§. 209. Erklärung. Das Verfahren (in §. 208.) wodurch beyde Glieder eines Verhältnisses mit der nämlichen dritten Zahl dividirt werden, heißt man ein Verhältniß heben.

§. 210. Anmerkung. Weil man durch das Heben eines Verhältnisses (§ 209.) aus dem gegebenen ein anderes findet, welches demselben am Werthe gleich, und nur durch kleinere Zahlen ausgedrückt ist, so erleichtert dieses Verfahren die Rechnung. Auch kann man eine gegebene Proportion, durch Aufheben der beyden Verhältnisse, auf die kleinsten Zahlen bringen, welches in der wirklichen Rechnung, wie die Folge lehren wird, manchen Vortheil gewähret. Z. B. in $15 : 3 = 35 : 7$ ist $\frac{15}{3} : \frac{3}{3} = 35 : 7$, oder $5 : 1 = 37 : 7 = \frac{37}{7} : \frac{7}{7} = 5 : 1$. Ferner ist $1600 : 80 = 140000 : 7000$ so viel als $160 : 8 = 140 : 7 = 20 : 1$.

§. 211. Lehrsatz. In jeder geometrischen Proportion verhält sich auch das erste Glied so zu dem dritten, wie sich das zweyte zu dem vierten verhält.

Beweis. Weil (nach §. 201, IV.) das erste Glied ein Product aus dem zweyten und dem Exponenten, und das dritte Glied ein Factum aus dem vierten und dem Exponenten ist, so ist in jeder Proportion das zweyte und vierte Glied nichts anders, als das erste und dritte, welche mit einerley dritten Zahl, dem Exponenten, multiplicirt sind. Nun ist aber das Verhältniß zweyer Zahlen, welche mit der nämlichen dritten multiplicirt sind, dem Verhältnisse der unmultiplicirten Zahlen selbst gleich (§. 208.) Folglich verhält sich auch das erste Glied zum dritten, wie das zweyte zum vierten.

Beyspiele.

$24 : 8 = 27 : 9$; folglich auch $24 ; 27 = 8 : 9$. Denn aus der ersten Proportion folgt $8 \times 3 : 8 = 9 \times 3 : 9$. Allein $8 \times 3 : 9 \times 3 = 8 : 9$ (§. 162). Daher auch $24 : 27 = 8 ; 9$. Ferner in $5 : 20 = 8 : 32$, ist auch $5 : 8 = 20 : 32$. Denn $5 = 20 \times \frac{1}{4}$ und $8 = 32 \times \frac{1}{4}$; folglich, weil $\frac{5}{20} = \frac{8}{32}$, auch $20 \times \frac{1}{4} : 20 = 32 \times \frac{1}{4} : 32$, und endlich $20 \times \frac{1}{4} : 32 \times \frac{1}{4} = 20 : 32$, d. h. $5 : 8 = 20 : 32$.

§. 212. Zusatz. I. Wenn sich daher das erste und dritte, oder das zweyte und vierte Glied einer gegebenen geometrischen Proportion mit einer gemeinschaftlichen dritten Zahl ohne Rest aufdividiren lassen, so kann man auch dadurch das Verhältniß dieser Glieder heben (§. 209) und die Proportion selbst in kleinern Zahlen ausdrücken. So ist z. B. in $6 : 18 = 9 : 27$ auch $\frac{6}{3}$:

18 = $\frac{2}{3}$: 27 oder 2: 18 = 3: 27. Ferner in 3: 24 = 5: 40 ist 3: $\frac{24}{4}$ = 5: $\frac{40}{4}$ oder 3: 6 = 5: 10.

II. Auch kann man das erste und dritte, oder das zweyte und vierte Glied einer Proportion mit der nämlichen dritten Zahl multipliciren, ohne die Gleichheit der beyden Verhältnisse zu stören. Z. B. in 4: 20 = 3: 15 ist auch 4 × 3: 20 = 3 × 3: 15 d. h. 12: 20 = 9: 15. Oder in 18: 6 = 21: 7 hat man auch 18: 6 × 2 = 21: 7 × 2 d. h 18: 12 = 21: 14.

§. 213. Zusatz. Hat der Fall Statt, daß ein Proportionsglied ein Bruch ist, so kann man dasselbige in eine ganze Zahl verwandeln, indem man mit seinem Nenner ein anderes Glied der Proportion, welches mit ihm verhältnißmäßig ist, (§. 208, §. 211.) multiplicirt. Denn hierdurch sind beyde Glieder mit einerley dritten Zahl multiplicirt (§. 212.) indem ein Bruch mit seinem Nenner multiplicirt wird, wenn man den Zähler desselben allein setzt. (§. 122, I.) z. B. 6: $\frac{3}{4}$ = 32: 4. Hier ist 4 × 6: 3 = 32: 4, d. h. 24: 3 = 32: 4. Ferner auch 6: 3 = 32: 4 × 4, d. h. 6: 3 = 32: 16.

214. Zusatz. Sind mehrere Glieder einer Proportion gebrochene Zahlen, so bringe man das Verfahren von §. 213. so oft an, bis man die Nenner alle Brüche hinweggeschafft, und in ganze Zahlen verwandelt hat. Es sey z. B. $\frac{3}{4}$: $\frac{12}{17}$ = $\frac{4}{5}$: $\frac{192}{255}$, so ist 3: $\frac{4 \times 12}{17}$ = 4: $\frac{5 \times 192}{255}$, oder 3 × 17: 4 × 12 = 4 × 255: 5 × 192. d. h. 51: 48 = 1020: 960 = 102: 96.

Hätte hingegen der Fall Statt, daß zwey Glieder,

welche verhältnißmäßig sind, Brüche von einerley Nenner wären, so kann man diese Nenner hinweglassen, und die Zähler allein als Proportionsglieder setzen. Z. B. $8 : \frac{6}{4} = 4 : \frac{3}{4}$ gibt $8 : 6 = 4 : 3$ u. s. w.

§. 215. Lehrsatz. Wenn man in zwey Proportionen die ersten, zweyten, dritten und vierten Glieder miteinander multiplicirt, so bilden die hieraus entstehenden Producte wieder eine Proportion.

Beweis. Nach §. 203. geben die beyden Proportionen vier Verhältnisse, wovon die zwey, welche in einerley Proportion stehen, einander gleich sind. Gleiche Verhältnisse geben aber gleiche Brüche, denn sie geben (nach §. 202.) gleiche Exponenten, d. h. gleiche Quotienten (§. 182.) und folglich auch gleiche Brüche (§ 122, II.). Daher werden die beyden ersten Verhältnisse der gegebenen Proportionen, als Brüche betrachtet, wenn sie miteinander multiplicirt werden, ein Product bilden, welches so groß seyn muß, als das Factum aus den beyden andern Verhältnissen, wenn dieselbe auch als Brüche angesehen werden. Nun geben aber die auf solche Art entstandenen beyden Brüche zwey gleiche Quotienten (§. 122, I.); folglich auch (nach §. 202.) zwey gleiche Verhältnisse, d. h. eine Proportion. — Die gegebenen Proportionen seyen z. B. $6 : 18 = 7 : 21$ und $4 : 5 = 20 : 25$, so ist auch $6 \times 4 : 18 \times 5 = 7 \times 20 : 21 \times 25$ Denn aus der ersten Proportion ist $\frac{6}{18} = \frac{7}{21}$ und die zweyte gibt $\frac{4}{5} = \frac{20}{25}$; folglich ist auch $\frac{6}{18} \times \frac{4}{5} = \frac{7}{21} \times \frac{20}{25}$ oder $\frac{6 \times 4}{18 \times 5} = \frac{7 \times 20}{21 \times 25}$. Daher $6 \times 4 : 18 \times 5 = 7 \times 20 : 21 \times 25$.

Da sich dieser Beweis nicht blos auf den Fall beschränkt, wo nur zwey Proportionen gegeben sind, sondern vielmehr aus demselben erhellet, daß er sich auf jede Anzahl von gegebenen Proportionen ausdehnen läßt, so ist ersichtlich, daß die Anwendung der Behauptung des Lehrsatzes allgemein ist.

§. 216. Zusatz. Wenn zwey Producte gleich sind, deren jedes aus zwey Factoren besteht, so läßt sich aus ihnen eine geometrische Proportion bilden, worin die Factoren des einen Products die inneren, die Factoren des andern Products die äusseren Glieder sind. Aus $9 \times 4 = 12 \times 3$ folgen die Proportionen:

$9 : 12 = 3 : 4,$

$9 : 3 = 12 : 4,$

$12 : 9 = 4 : 3$ und

$12 : 4 = 9 : 3.$

Denn da $9 \times 4 = 12 \times 3$, so ist auch, wenn man beyderseits zuerst mit 12 und dann mit 4 dividirt, $\frac{9}{12} = \frac{3}{4}$, woraus die Proportion $9 : 12 = 3 : 4$ hervorgeht.

§. 217. Erklärung. Proportionen, welche (nach §§. 215, 217.) durch Multiplication der gleichnamigen Glieder mehrerer gegebenen entstanden sind, heißt man zusammengesetzte Proportionen.

§. 218. Aufgabe. Zu drey gegebenen Gliedern einer Proportion die vierte geometrische Proportionalzahl zu finden.

Auflösung. I. Wenn das zu findende Glied eines der äussern ist.

Hier dividire man das Product der beyden mittlern

Glieder durch das vorhandene äußere, so gibt der Quotient das fehlende äussere Glied.

II. Wenn das zu suchende Glied ein mittleres ist. Nun multiplicire man die beyden äußern Glieder mit einander, und dividire dieses Factum durch das gegebene mittlere Glied, so gibt der Quotient das zu suchende mittlere.

Beweis. In jeder geometrischen Proportion ist ein Product aus den beyden äußern Gliedern so groß, als ein Product der innern Glieder. (§. 159.). In den beyden Fällen der Auflösung ist nun jedesmal eines dieser Producte gegeben, und nebst diesem noch ein Factor, welcher mit einem zu findenden multiplicirt, eben dieses Factum hervorbringen wird. Nun bekömmt man aber, durch die Division des Productes mit dem einen Factor, zum Quotienten den andern, (nach §. 36, IV.) welcher zugleich das fehlende Glied in der Proportion ist. Folglich ist die gegebene Auflösung richtig.

Beyspiele.

Für I. In $7 : 35 = 10 : x$ soll x das fehlende Glied bedeuten, so ist (nach §. 205.) $7 \times x = 35 \times 10 = 350$; folglich $x = \frac{350}{7} = 50$ (§. 36, IV.), und die Proportion ist diese $7 : 35 = 10 : 50$. — Wäre das zu suchende Glied das erste und die Proportion z. B. folgende $x : 12 = 9 : 144$, so ist wieder $x \times 144 = 12 \times 9 = 108$ folglich $x = \frac{108}{144} = \frac{3}{4}$, und die ganze Proportion ist diese $\frac{3}{4} : 12 = 9 : 144$.

Für II. Die Proportion sey $9 : x = 12 : 140$, wo wieder x das fehlende Glied bedeutet, so ist $x \times$

$12 = 9 \times 140 = 1260$ (§. 205.) daher auch $x = \frac{1260}{12}$ (§. 36, IV.) $= 105$, und die Proportion $9 : 105 = 12 : 140$. — Fehlte das andere mittlere Glied, wie z. B. in $18 : 7 = x : 39$, so ist wieder $7 \times x = 18 \times 39 = 702$, und $x = \frac{702}{7} = 100\frac{2}{7}$. Folglich ist die Proportion $18 : 7 = 100\frac{2}{7} : 39$. —

§. 219. Lehrsatz. In jeder geometrischen Proportion verhält sich die Summe oder die Differenz aus dem ersten und zweyten Gliede zu dem ersten oder zweyten Gliede, wie die Summe oder die Differenz aus dem dritten und vierten Gliede sich zum dritten oder vierten Gliede verhält.

Beweis. Zur größern Erläuterung soll dieser Beweis an einem Zahlenbeyspiele durchgeführt werden, welches denselben, da er auf jedes andere Beyspiel anwendbar ist, nichts an seiner Allgemeinheit benimmt. Es sey z. B.

$12 : 3 = 24 : 6$, so ist
$3 \times 4 : 3 = 6 \times 4 : 6$ (§. 201, IV.) und
$3 \times 4 : 6 \times 4 = 3 : 6$ (§. 211.) oder
$4 \times 3 : 4 \times 6 = 3 : 6$, daher auch
$5 \times 3 : 5 \times 6 = 3 : 6$ (§. 208.) oder
$12 + 3 : 24 + 6 = 3 : 6$ d. h.
$12 + 3 : 3 = 24 + 6 : 6$. Daher verhält sich die Summe vom ersten und zweyten Gliede zum zweyten Gliede, wie die Summe aus dem dritten und vierten Gliede sich zum vierten Gliede verhält.

Auf ähnliche Weise beweiset man, daß auch $12 - 3 : 3 = 24 - 6 : 6$.

§. 220. Zusatz. Auf ähnliche Art wird gezeigt,

daß sich in jeder geometrischen Proportion die Summe oder Differenz aus dem ersten und dritten Gliede so zu dem ersten oder dritten verhält, wie sich die Summe oder Differenz aus dem zweyten und vierten Gliede zu dem zweyten und vierten verhält. Es sey z. B.

24 : 8 = 12 : 4, so ist
24 + 12 : 24 = 8 + 4 : 8, oder
24 — 12 : 24 = 8 — 4 : 8, oder
24 + 12 : 12 = 8 + 4 : 4, oder
24 — 12 : 12 = 8 — 4 : 4 u. s. w.

§. 221. Aufgabe. Wenn in einer Proportion die drey ersten Glieder, wozu das vierte gesucht werden soll, angegeben, und nebst dem noch mehrere Verhältnisse vorhanden sind; so, daß jenes gefundene vierte Glied im ersten der gegebenen Verhältnisse das dritte wird, wozu man ein neues vierte sucht, welches in dem folgenden Verhältnisse wieder ein drittes Glied zu einem zu findenden vierten ist, u. s. w. dasjenige Glied zu finden, welches in der letzten Proportion das vierte ist.

Auflösung. Man schreibe alle angegebene Verhältnisse unter das erste Verhältniß der Proportion, mache ein Product aus allen ersten und aus allen zweyten Gliedern, multiplicire letzteres mit dem dritten Gliede der Proportion, und dividire nun dieses Factum durch das Product aller ersten Glieder, so ist der Quotient das zu findende letzte Glied.

Beweis. Das vierte Glied der ersten Proportion ist ein Product aus den mittlern Gliedern dividirt durch das erste (§. 220. I.) Dieser Quotient kömmt nun als drittes Glied in die folgende Proportion, wozu das vierte wieder gefunden wird, wenn man ihn mit

einem Bruche multiplicirt, dessen Zähler das zweyte, und dessen Nenner das erste Glied des gegebenen Verhältnisses ist. Dieses Factum ist folglich auch ein Bruch, dessen Zähler ein Product aus den beyden mittlern Gliedern der Proportion und dem zweyten Gliede des ersten Verhältnisses, dessen Nenner hingegen ein Factum aus dem ersten Gliede der Proportion und dem ersten Gliede des Verhältnisses ist. Dieser Bruch kömmt nun wieder als drittes Glied zur folgenden Proportion, und es erhellet wieder, daß das vierte Glied dazu ein Bruch sey, dessen Zähler ein Product aller zweyten Glieder der ersten Verhältnisse in das zuerst gegebene dritte, und dessen Nenner ein Factum aus allen ersten Gliedern der Verhältnisse sey. Da man diesen Beweis für den Fall, wo noch mehrere Verhältnisse gegeben sind, weiter fortsetzen kann, so ergibt sich hieraus die Richtigkeit der obigen Auflösung.

Erläuterung dieses Beweises.

Die gegebene Proportion sey

$3 : 15 = 8 : x$, und die Verhältnisse seyen

$5 : 9 = - : -$

$6 : 10 = - : -$, so ist zuerst $x = \frac{15 \times 8}{3}$ (§. 172, I.).

Dieses, als drittes Glied in die zweyte Proportion gesetzt, gibt

$5 : 9 = \frac{15 \times 8}{3} : y$, wo $y = \frac{9 \times 15 \times 8}{3 \times 5}$. Diesen Bruch nun noch einmal zu dem letzten Verhältnisse als drittes Glied gesetzt, gibt $6 : 10 = \frac{9 \times 15 \times 8}{3 \times 6} : z$, wo denn $z = \frac{10 \times 9 \times 15 \times 8}{3 \times 5 \times 6} = 120$ wird.

Anderer Beweis.

Es sey 5 : 12 = 7 : x, ferner
8 : 15 = — : — und
9 : 4 = — : — gegeben.

Man denke sich unter x, in der ersten Proportion, die durch die wirkliche Rechnung gefundene Größe dieses vierten Gliedes, so wird die zweyte Proportion diese, 8 : 15 = x : y, wo wieder y das berechnete letzte Glied in dieser Proportion seyn kann. Endlich wird 9 : 4 = y : z, wo z eigentlich Dasjenige ist, was gesucht wird. Die sämmtlichen Proportionen stehen daher folgendergestalt unter einander.

5 : 12 = 7 : x
8 : 15 = x : y und
9 : 4 = y : z, folglich ist (nach §. 215.) $5 \times 8 \times 9 : 12 \times 15 \times 4 = 7 \times x \times y : x \times y \times z$, oder (nach §. 208.) $5 \times 8 \times 9 : 12 \times 15 \times 4 = 7 : z$, woraus denn (nach §. 218, I.) $z = \frac{12 \times 15 \times 4 \times 7}{5 \times 8 \times 9}$ wird, welches den Werth für z nach der obigen Auflösung gibt.

§. 222. Anmerkung. Die bisher vorgetragenen theoretischen Sätze von den Verhältnissen und Proportionen enthalten den Grund zu der Anwendung dieser Lehre auf die im gemeinen Leben am Meisten vorkommenden Rechnungen, und es wäre gegen den Zweck dieser Anfangsgründe gewesen, die Theorie derselben vollständiger auszuführen. Die wichtigsten dieser Proportions-Rechnungen werden nun vorgetragen.

I. Von der einfachen Regel Detri.

§. 223. Erklärung. Wenn man auf die Gegenstände Rücksicht nimmt, welche in den Rechnungen des gemeinen Lebens am Häufigsten vorkommen, so bemerkt

man bald, daß zwischen denselben ein geometrisches Verhältniß Statt hat. Man findet, daß bey Vergrößerung oder Verringerung des einen, der andere ebenfalls so vielmal vergrößert oder verringert werde, oder auch umgekehrt. Wer z. B. eine gewisse Menge von *Waaren* für einen bestimmten Preis eingekauft hat, *wird, wenn* er sechsmal so viele Waare von der nämlichen Gattung kaufen will, auch einen sechsfach höhern Werth erlegen müssen. Im Gegentheile wird man für den vierten Theil der nämlichen Waare auch nur den vierten Theil des Preises entrichten. Man sagt daher in dieser Rücksicht: die Waare verhält sich so wie der Preis, und auch der Preis so wie die Waare. Insbesondere heißt dieses Verhältniß hier ein gerades, weil, bey dem Größerwerden des einen zu vergleichenden Gegenstandes, auch der andere eben so vielmal größer; und, bey dem Kleinerwerden des *einen*, auch der andere eben so vielmal kleiner wird. Wer hingegen eine gewisse Arbeit von einer bestimmten Anzahl Menschen in einer festgesetzten Zeit vollendet, wird für eben dieses Werk mehr Arbeiter nöthig haben, wenn er es in einer kürzern Zeit; und weniger, wenn er es in einer längern Zeit beendigen will. In diesem Falle nun wird der eine Gegenstand so vielmal vergrößert, so vielmal der andere verringert, und der eine so vielmal verringert, so oft der andere vergrößert wird. Ein solches Verhalten zweyer Dinge wird ein verkehrtes oder umgekehrtes Verhältniß genennt, und man sagt in obigem Beyspiele: daß die Menge der Arbeiter sich verkehrt wie die Zeit verhalte.

§. 224. Erklärung. Die einfache Regel

Detri oder die Regel von drey Sätzen ist die Art und Weise, wie man aus drey angegebenen Dingen (Sätzen), deren zwey unter sich gleichartig sind, ein viertes, welches mit dem angegebenen dritten von einerley Art ist, durch Rechnung finden soll, welches in eben dem Verhältnisse zu dem dritten, wie das zweyte zu dem ersten steht. Z. B. Man fragt: wenn 6 ℔ einer gewissen Materie 15 Gulden kosten, was werden 20 ℔ von eben dieser Materie werth seyn? — Hier sucht man den Preis von 20 ℔, d. h. etwas, was mit den gegebenen 15 fl. von einerley Art ist. Auch wird die zu findende Menge von Gulden, weil unter den angegebenen Dingen ein gerades Verhältniß (§. 175.) Statt hat, so vielmal größer, als die gegebene von 15 fl, so vielmal die 20 ℔ größer als die 6 ℔ sind.

§. 225. Grundsätze. I. Aus §. 223 und §. 224 folgt, daß die Regel Detri nichts anders, als die geometrische Proportion sey, wo man aus drey gegebenen ersten Gliedern die vierte geometrische Proportionalzahl, als das zu findende vierte Glied suchet.

II. Daher müssen bey den Aufgaben, welche vermittelst der Regel Detri aufgelös't werden sollen, gerade drey Säze, als die Glieder einer Proportion, gegeben seyn. (§. 204.).

III. Unter diesen drey Sätzen müssen zwey von einerley Art, und der dritte muß mit dem zu findenden vierten gleichartig seyn (§. 224.).

§. 226. Aufgabe. Die Säze, welche bey der einfachen Regel Detri vorkommen, zu ordnen, und das fehlende vierte Glied zu bestimmen.

Auflösung. I. Man suche von den drey gegebe-

nen Sätzen denjenigen, welcher mit dem zu findenden einerley Namen hat, und setze denselben als drittes Glied in die Proportion.

II. Man untersuche, ob nach den beyden andern gleichartigen Gliedern das zu findende vierte Glied größer oder kleiner, als das dritte werden wird, welches aus der Natur der Sache sowohl, als auch nach §. 223. leicht zu bestimmen ist.

III. Im ersten Falle von II. ist das zweyte Verhältniß der zu bildenden Proportion vom Kleinern zum Größern; im zweyten hingegen vom Größern zum Kleinern (§. 184.). Man ordne demnach das erste Verhältniß, dessen beyde Glieder gegeben sind, nach der nämlichen Ungleichheit, so entsteht hieraus

IV. Eine Proportion, worin das fehlende vierte Glied aus den bekannten drey ersten (nach §. 218, I.) leicht berechnet werden kann.

Erläuterung dieser Auflösung.

Wenn 7 Ellen von einem gewissen Tuche 12 Gulden kosten, was wird man für 19 Ellen von eben diesem Tuche geben müssen?

Nach I. wird, weil hier Gulden gesucht werden, die gegebene Menge von 12 Gulden das dritte Glied, und die Proportion wäre bis jetzt diese — : — = 12 : x. Nach diesem erhellet sogleich, daß die zu findende Guldenzahl größer als die gegebene seyn werde, weil 19 Ellen mehr als 7 Ellen sind, und hier ein gerades Verhältniß (§. 223.) Statt hat. Es ist folglich (nach II.) hier ein Verhältniß vom Kleinern zum Größern (§. 184.), und das erste Verhältniß der zu setzenden Proportion muß von der nämlichen Ungleichheit seyn. Daher ent-

steht (nach der Vorschrift von III.) folgende Proportion $7 : 19 = 12 : x$, wo denn (nach §. 220, I.) $x = \frac{19 \times 12}{7} = \frac{228}{7} = 32\frac{4}{7}$ Gulden wird.

Beweis. Die Auflösung beruht unmittelbar auf den Sätzen in §§. 223, 224, 225 und auf §. 218, I.; daher bedarf sie keiner weitern Begründung.

§. 227. Anmerkung. Wenn die drey gegebenen Sätze als Glieder einer Proportion geordnet sind, so versuche man, ehe die Auflösung (nach §. 218, I.) unternommen wird, ob die §§. 208, 212, f. ihre Anwendung finden, oder nicht; weil nämlich, im Falle sich die verhältnißmäßigen Glieder durch eine Zahl heben lassen, dieses die Rechnung sehr erleichtert. Besonders muß man, in den Fällen, wo Brüche vorkommen, sich der Weisung in §. 213, 214 bedienen, um die Nenner derselben hinwegzubringen.

§. 228. Anmerkung. Wenn die gegebenen Sätze als drey Glieder einer Proportion geordnet sind und nunmehr das Product der mittlern Glieder durch das erste dividirt wird, um das letzte zu finden, so könnte über diese Auflösung folgender Zweifel entstehen. Die gegebenen Dinge in der Proportion sind benannte Zahlen (§. 69.) Wie kann man sich aber ein Product aus einer benannten Zahl in eine benannte denken, und was soll ein Quotient vorstellen, dessen Dividend ein Product aus zwey benannten Zahlen, dessen Divisor auch eine solche Zahl ist? Wie kann man sich z. B. in §. 178. ein Product aus 19 Ellen in 12 Gulden erklären; und, wie einen Quotienten, der herauskömmt, wenn dieses Product durch 7 Ellen dividirt wird? (§). — Hier muß man bemerken, daß es bey der Regel Detri nur darum zu thun ist, eine vierte geometrische Proportionalzahl (§. 223, 224.) zu finden. Sobald daher die gegebenen Sätze in der Proportion geordnet sind, werden sie nicht mehr als benannte Zahlen, sondern als Zahlen, überhaupt angesehen. In der obigen Aufgabe betrachtet man also die Zahlen 7, 19 und 12 nicht mehr als Ellen und Gulden, sondern als bloße Mengen von Einheiten. Durch die Rechnung findet man nun, daß $32\frac{4}{7}$ das vierte Glied der Proportion werde. Auch diese Zahl drückt, als vierte geometrische Proportionalzahl, gewiß

noch keine Menge von Gulden aus. Allein mit vollem Rechte sagt man doch, diese 19 Ellen werden $32\frac{4}{7}$ Gulden kosten, weil sich die Ellen so wie die Gulden verhalten (§. 223.)

§ 229. Beyspiele zur Uebung. I. Wenn 18 Arbeiter ein gewisses Werk binnen 40 Tagen verfertigen; in welcher Zeit werden 32 Personen das nämliche Werk vollenden?

Hier soll eine Menge von Tagen gesucht werden. Sie heisse x, so ist (nach §. 226, I.) —:— = 40: x. Weil nun die 32 Arbeiter das zu verfertigende Werk eher, als die 18 beendigen werden, so ist (nach §. 226, II, III, IV.) 32 : 18 = 40: x; oder, indem man das erste und dritte Glied (nach §. 212, I.) durch 8 dividirt, 4: 18 = 5: x; oder, wenn man das erste Verhältniß mit 2 hebt, 2: 9 = 5: x, woraus denn, (nach §. 218, I.) $x = \frac{9 \times 5}{2} = \frac{45}{2} = 22\frac{1}{2}$ Tag wird.

II. Wenn $7\frac{3}{4}$ Pfunde einer gewissen Materie $12\frac{1}{2}$ Gulden kosten; was wird man für $18\frac{2}{3}$ Pfunde von eben dieser Materie geben müssen?

Es bedeute wieder x die zu suchenden Gulden, so ist die anzusetzende Proportion (nach §. 226.) diese $7\frac{3}{4}$: $18\frac{2}{3} = 12\frac{1}{2}$: x; oder, indem man die Brüche einrichtet, $\frac{31}{4} : \frac{56}{3} = \frac{25}{2}$: x (§. 151, I.) ferner 31: $\frac{56}{3} = \frac{25 \times 4}{2}$: x (§ 213.) oder 93: 56 = 50: x (§. 213.) woraus $x = \frac{56 \times 50}{93} = \frac{2800}{93} = 30\frac{10}{93}$ Guld. = 30 Guld. und $\frac{10 \times 60}{93}$ Kr. (§. 169, I.) = $\frac{600}{93}$ = 6 $\frac{42}{93}$ Kr. = 6 Kr. $\frac{42 \times 4}{93}$ Pf. (§. 269, I.) = $\frac{168}{93}$ Pf.

$= 1 \frac{75}{93}$ Pf. $= 1 \frac{25}{31}$ Pf. Folglich ist $x = 30$ Guld. 6 Kr. $1 \frac{25}{31}$ Pf.

III. Wie viele Zinsen wird ein Kapital von 23850 Guld. in einem Jahre ertragen, wenn man vom 100 Gulden $4 \frac{1}{2}$ Interessen bekömmt? —

Man sucht die Zinsen $= x$, und die Proportion ist diese

$100 : 23850 = 4 \frac{1}{2} : x$, oder

$10 : 2385 = \frac{9}{2} : x$, oder

$20 : 2385 = 9 : x$, wo denn $x = \frac{2385 \times 9}{20} = \frac{21465}{20} = 1073 \frac{1}{4}$ Gulden ist; d. h. das gegebene Kapital wird 1073 Gulden 15 Kreuzer Zinsen bringen.

§. 230. Anmerkung. Hätte der Fall Statt, daß die gegebenen Sätze benannte Zahlen von verschiedenen Werth-arten wären, so müßten dieselbe, wenn sie in eine Proportion geordnet sind, zuerst (nach §. 107.) auf Einheiten der niedrigsten Werthart reducirt werden. Nach diesem geschieht die fernere Auflösung wie oben (in §. 226.) z. B. 8 Centner, 75 Pfunde, 12 Lothe, 3 Quentchen kosten 148 Gulden, 24 Kreuzer; wie viel wird man für 337 Gulden, 36 Kreuzer bekommen? — Hier ist (nach §. 226.) die Proportion diese 148 Guld. 24 Kr.: 337 Guld. 36 Kr. = 8 Cent. 75 Pf. 12 Lothe 3 Quent.: x. Reducirt man im ersten und zweyten Gliede alles auf Kreuzer, und im dritten auf Quentchen, so entsteht hieraus Folgendes:

8904 Kr. : 20256 Kr. = 112051 Quentch. : x, oder

$1113 : 2532 = 112051 : x$

folglich $x = \frac{2532 \times 112051}{1113} = \frac{283713132}{1113}$ Quentchen $=$ 19 Centner, 91 Pfunde, 13 Lothe und $\frac{528}{1113}$ Quentchen.

Nach diesem Muster werden alle ähnliche Anfgaben dieser Art aufgelös't.

II. Gewinn- und Verlustrechnung.

§. 231. Erklärung. Eine Rechnung, welche nichts anders, als eine Anwendung der einfachen Regel

Detri ist, und bey den Geschäften des gemeinen Lebens häufig vorkömmt, ist die sogenannte Gewinn- und Verlustrechnung. Sie begreift alle jene Fälle unter sich, wo bey Kauf und Verkauf der sich ergebende Gewinn oder Verlust nach 100 bestimmt wird. Dasjenige, was an jedem 100 einer gewissen Summe gewonnen oder verlohren wird, heißt Procentgewinn, oder Procentverlust. Wer z. B. eine Parthie Waaren für 300 Gulden eingekauft und dieselbe wieder für 315 Gulden abgesetzt hat, hat 5 fürs 100 gewonnen, und sein Procentgewinn ist daher 5 Gulden. Hätte er diese Waaren für 288 Gulden verkauft, so würde sein Procentverlust 4 Gulden gewesen seyn; denn er hätte 4 Gulden am 100 verlohren.

§. 232. Zusatz. Die Fälle, welche nach dieser Erklärung vorkommen können, reduciren sich auf nachfolgende beyde Aufgaben.

I. Aus dem gegebenen Preise des Einkaufs den Werth des Verkaufs zu bestimmen, wenn zugleich der Procentgewinn angegeben ist.

II. Aus dem bekannten Verkaufe nebst dem Procentgewinn oder Procentverlust die Größe des Einkaufs zu berechnen,

deren jede eine besondere Weisung zur Auflösung erfodert.

§. 233. Aufgabe. Die Größe des Verkaufs zu bestimmen, wenn der Einkauf nebst dem Procentgewinn gegeben ist.

Auflösung. Man addire den gegebenen Procentgewinn zu 100, so ist 100 als bloßer Einkauf, und jene Summe als Verkauf mit Procentgewinn anzusehen.

Nebst diesen beyden Dingen ist nun noch der Einkauf bekannt. Man ordne daher dieselbe, als drey Glieder einer Proportion, nach der Regel: Der Einkauf verhält sich zu dem Einkaufe, wie der Verkauf mit Procentgewinn zu dem zu findenden Verkaufe nebst Procentgewinn, und bestimme nun (nach §. 218, I.) die Größe des fehlenden vierten Gliedes.

Beweis. Weil aus der Natur der Sache folgt, daß der Einkauf und Verkauf mit Procentgewinn in einem geometrischen Verhältnisse stehen, so hat auch hier die geometrische Proportion, und die Auflösung von §. 218, I. Statt.

Beyspiele. I. Ein Kaufmann hat eine Parthie Waaren für 1350 Gulden eingekanft. Wie theuer muß er dieselbe verkaufen, um an jedem 100 Gulden 6 Gulden zu gewinnen?

Hier sind 100 Gulden als bloßer Einkauf, und 106 Gulden als Verkauf mit Procentgewinn anzusehen. Folglich ist die Proportion diese:

$100 : 1350 = 106 : x$ oder
$10 : 135 = 106 : x$ (§. 208.) oder
$5 : 135 = 53 : x$ (§. 212, I.) oder
$1 : 27 = 53 : x$ (§ 208) folglich
$x = 27 \times 53 = 1431$ Gulden.

II. Wie theuer muß ein Wirth das Stück Wein, welches er für 540 Gulden eingekauft hat, wieder verkaufen, um 15 Gulden am 100 zu gewinnen?

Hier ist die Proportion diese:

$100 : 540 = 115 : x$, oder

$10 : 54 = 115 : x$, oder

$5 : 27 = 115 : x$, oder

$1 : 27 = 23 : x$, folglich

$x = 27 \times 23 = 621$ Gulden.

§. 234. Anmerkung. Es ist einleuchtend, daß nach dieser Auflösung (in §. 233.) auch der Fall berechnet werden müsse, wenn, an Statt des Procentgewinnes, der Procentverlust gefunden werden soll. Z. B. ein Kaufmann kauft eine gewisse Menge Waaren für 1350 Gulden und verkauft sie mit 4 Procent Verlust. Was hat er aus dem Verkauf erlös't?

Die Regel zur Auflösung ist hier diese: der bloße Einkauf verhält sich zu dem bloßen Einkaufe, wie der Verkauf mit Procentverlust zu dem Verkaufe mit Procentverlust. Da nun hier 4 am 100 sind verlohren worden, so ist $100 - 4 = 96$ der Verkauf mit Procentverlust am 100, und folglich die Proportion diese:

$100 : 1350 = 96 : x$, oder

$10 : 135 = 96 : x$ oder

$5 : 135 = 48 : x$ oder $1 : 27 = 48 : x$. Daher $x = 27 \times 48 = 1296$ Gulden, und dies war der Preis des Verkaufs. Weil nun der Einkauf 1350 Gulden betrug, so hatte er überhaupt einen Verlust von $1350 - 1296 = 54$ Gulden.

§. 235. Anmerkung. Oft hat der Fall Statt, daß in diesen Aufgaben (von §. 234.) gefunden werden soll, wie theuer ein kleinerer Theil als jener, worin der Einkauf geschah, wieder verkauft werden soll, um einen bestimmten Procentgewinn zu erhalten. Z. B. Ein Wirth kaufte ein Stück Wein für 350 Gulden, und verlangt zu wissen, wie hoch er die Maaß davon wieder verkaufen müsse, um 6 Gulden am 100 zu gewinnen? —

Hier sucht man zuerst (nach §. 233.), wie hoch das ganze Stück zu verkaufen ist, um den bestimmten Procentge-

winn zu erhalten. Man bekömmt folgende Proportion 100 : 350 = 106 : x, woraus x = 371 Gulden. Weil nun ein Stück Wein 600 Maaß enthält, so wird $\frac{371}{600}$ Gulden den Preis einer Maaß bestimmen. Allein $\frac{371}{600}$ Guld = $\frac{371 \times 60}{600}$ Kr. = $\frac{371}{10}$ = 37 $\frac{1}{10}$ Kr. Daher muß die Maaß um 37 $\frac{1}{10}$ Kr. verkauft werden, um den verlangten Gewinn zu erhalten.

Ferner: Man hat für 68 Pfund einer gewissen Waare 136 Gulden gegeben; wie hoch muß ein Loth verkauft werden, um 12 Procent Gewinn zu erhalten? — Hier ist wieder der Ansatz dieser:

100 : 136 = 112 : x, wo x = $\frac{3808}{25}$ Gulden wird. Da nun 32 Lothe auf ein Pfund gehen, so betragen die 68 Pfunde so viel als 68 × 32 = 2176 Lothe, und der gefundene Werth muß noch durch 2176 × 25 = 54400 dividirt werden. Dieses gibt $\frac{3808}{54400}$ Guld. = $\frac{3808 \times 60}{54400}$ Kr. = $\frac{228480}{54400}$ = $\frac{22848}{5440}$ = 4 $\frac{1088}{5440}$. Kr. = 4 Kr. und beynahe 1 Pfennig.

§. 236. Aufgabe. Die Größe des Einkaufs zu bestimmen, wenn der Verkauf nebst Procent Gewinn angegeben ist.

Auflösung. Man addire den gegebenen Procent Gewinn zu 100, so ist diese Summe als Verkauf mit Procent Gewinn und die 100 allein als bloßer Einkauf anzusehen. Nebst diesen ist der angegebene Verkauf mit Procent Gewinn bekannt. Daher sind drey Sätze vorhanden, wozu der vierte gefunden werden soll. Man ordne nun diese Sätze nach der Regel: der Verkauf mit Procent Gewinn verhält sich zu dem Verkaufe nebst Procent Gewinn, wie der bloße Einkaufe zu dem bloßen Einkaufe; und löse nun diese Proportion (nach §. 218, I.) auf.

Beweis. Da es aus der Natur der Sache folgt, daß zwischen den in der Auflösung erwähnten Sätzen geo

metrische Verhältnisse Statt haben, so beruht die Richtigkeit derselben auf §. 218, I.

Beyspiele. I. Ein Kaufmann setzte eine gewisse Menge Waaren für 1480 Gulden ab, und weiß, daß er 25 Gulden am 100 gewonnen hat. Wie groß war der Einkauf?

Hier ist 125 der Verkauf mit Procent Gewinn, so wie auch die erlös'te Summe von 1430 Gulden es ist. Der bloße Einkauf hingegen ist 100. Folglich wird die Proportion diese:

$125 : 1480 = 100 : x$ oder

$5 : 1480 = 4 : x$ oder

$1 : 296 = 4 : x$, woraus

$x = 296 \times 4 = 1184$ Gulden wird, welches der bloße Einkauf ist.

II. Wie hoch war der Einkauf eines Stück Weins, wenn dasselbe mit 30 Gulden Procent Gewinn für 1345 Gulden verkauft worden ist?

Die Anordnung der Sätze in die Proportion gibt Folgendes $130 : 1345 = 100 : x$,

oder $13 : 1345 = 10 : x$,

woraus $x = \frac{1345 \times 10}{13} = \frac{13450}{13} = 1034 \frac{8}{13}$ Gulden wird.

§. 237. Anmerkung. Wäre in der Aufgabe des vor. §. an Statt des Verkaufs mit Procent Gewinn, der Verkauf nebst dem Procent Verlust gegeben, so ist es einleuchtend, daß auch hieraus die Größe des Einkaufes gefunden werden kann. Z. B. Ein Kaufmann verkauft eine Parthie Waaren für 2600 Gulden mit einem Procent Verlust von 6 Gulden. Wie hoch war der Einkauf?

Die Regel zur Auflösung ist diese: Verkauf mit Procent Verlust verhält sich zum Verkaufe mit

Procent Verlust, wie bloßer Einkauf zum bloßen Einkaufe. Wer nun 4 Procent Verlust erleidet, bekömmt für 100 nur 100 — 4 oder 96 Gulden. Daher ist Folgendes der Ansatz: $96 : 2500 = 100 : x$, oder $24 : 625 = 100 : x$ oder $6 : 625 = 25 : x$, woraus $x = \frac{625 \times 25}{6} = \frac{15625}{6} = 2604 \frac{1}{6}$ Gulden d. h. 2604 Guld. 10 Kr. wird.

§. 238. Anmerkung. Desgleichen ist klar, daß die Aufgabe des §. 188. auch auf Procent Verlust angewendet werden könne, und daß die bisherigen Lehren zur Auflösung derselben hinreichen. Ein Beyspiel hievon sey Folgendes: Man verkauft das Loth einer gewissen Materie für 12 Kr. mit 3 Procent Verlust. Wie hoch hat man 86 Pfunde von eben dieser Waare eingekauft? — Der Ansatz ist dieser: $97 : 12 = 100 : x$, wo $x = \frac{1200}{97}$. Nun ist aber 86 Pf. $= 86 \times 32 = 2752$ Lothe. Folglich $\frac{1200 \times 2752}{97} = \frac{3302400}{97} = 34045 \frac{35}{97}$ Kr. $= 567$ Guld. $25 \frac{35}{97}$ Kr.

III. Zusammengesetzte Regel Detri.

§. 239. Erklärung. Die zusammengesetzte Regel Detri faßt alle jene Aufgaben unter sich, wo es darauf ankömmt, aus mehr als drey gegebenen bekannten Dingen, z. B. aus fünf, sieben, neun oder noch mehreren, ein unbekanntes durch Rechnung zu bestimmen. Man nennt diese Rechnung auch die Regel Dequinque weil es am Häufigsten vorkömmt, aus fünf gegebenen Sätzen den unbekannten sechsten zu finden. Ein Beyspiel zur Erläuterung wäre dieses: Wie viele Zinsen wird ein Kapital von 5870 Gulden in 6 Jahren ertragen, wenn man von 3500 Gulden in 8 Jahren 1400 Gulden Interessen bekömmt?

§. 240. Grundsätze. I. In der zusammenge-

setzten Regel Detri ist die Anzahl der gegebenen Dinge immer eine ungerade, d. h. man sucht entweder aus fünf Sätzen den sechsten; aus sieben den achten; aus neun den zehnten. u. s. w.

In dem Beyspiele des vor. §. soll man aus den gegebenen Kapitalien von 5870 Gulden und 3500 Gulden; dann aus den verschiedenen Zeiten von 6 und 8 Jahren, während welchen sie auf Interessen liegen, und endlich aus den angegebenen Zinsen von 1400 Gulden die unbekannten Interessen finden.

II. Unter den angegebenen Dingen sind immer zwey unter sich, und das noch übrige fünfte ist mit dem zu findenden sechsten von einerley Art.

Im angeführten Beyspiele sind die 5870 Gulden mit den 3500 Gulden als Kapitalien, ferner die 6 und 8 Jahre als die bestimmte Zeit, und endlich die 1400 Gulden mit den zu findenden Zinsen von der nämlichen Art.

III. Jedes Paar dieser gleichartigen Dinge (in II.) bildet in Vergleichung mit demjenigen, welches noch übrig bleibt, eine einfache Regel Detri (§. 223.). Denn jedes Paar derselben bestimmt in Vergleichung mit diesem einzelnen Gliede die verhältnißmäßige Größe des zu findenden Gliedes.

In der obigen Aufgabe sucht man die Zinsen. Die Größe derselben hängt aber sowohl von der Größe des Kapitals, welches auf Interessen ausgelegt ist, als auch von der Länge der Zeit ab, wärend welcher dieses Kapital auf Zinsen liegt. Die Größe der zu findenden Zinsen muß folglich einmal nach der Größe der beyden Kapitalien von 5870 und 3500 Gulden, und dann auch

noch einmal nach der bestimmten Zeit von 6 und 8 Jahren berechnet werden.

§. 241. Aufgabe. Bey der zusammengesetzten Regel Detri aus fünf gegebenen Sätzen den unbekannten sechsten zu finden.

Auflösung. I. Man nehme dasjenige von den fünf gegebenen Dingen, welches mit dem zu findenden von einerley Art ist (§. 240, II.), und setze es als drittes Glied in eine Proportion, wozu x das zu findende vierte Glied ist.

II. Nun nehme man irgend ein Paar von den gegebenen gleichartigen Dingen (§. 240, II.), vergleiche dasselbe mit dem dritten in I., und bestimme (nach §. 226, II.) ob das vierte Glied größer oder kleiner als das dritte seyn wird. In jenem Falle wird das erste Verhältniß der Proportion vom Kleinern zum Größern, in diesem hingegen vom Größern zum Kleinern werden. (§. 226, III.).

III. Nun gehe man zu dem andern Paare der gegebenen gleichartigen Dinge über, setze das erste Paar derselben in II. ganz ausser Augen, vergleiche wie in II. das dritte Glied mit demselben, und bestimme wieder, ob es hierdurch vergrößert oder verkleinert werden wird. Hieraus ergibt es sich, ob das Verhältniß, welches aus diesen beyden gleichartigen Gliedern gebildet wird, vom Kleinern zum Größern, oder vom Größern zum Kleinern seyn werde.

IV. Dieses zweyte Verhältniß in III. setze man unter das erste in II., multiplicire die gleichnamigen Glieder miteinander, suche zu diesen beyden Producten, und dem dritten Gliede (nach §. 218, I.) das verhält-

nißmäßigt vierte, so ist dieses das zu findende sechste in der Aufgabe.

Erläuterung dieser Auflösung.

In dem Beyspiele des §. 239. sollen Zinsen gefunden werden. Daher werden die gegebenen Interessen zu 1400 Gulden nach I. das dritte Glied einer Proportion, welche man mit den fehlenden Gliedern so vorstellen kann. — : — = 1400 : x. Sieht man nun (mit Hinweglassung der verschiedenen Zeit) allein auf die gegebenen Kapitalien, so ist klar, daß 5870 Gulden mehr Zinsen als 1400 Gulden bringen werden, da die 3500 Gulden schon 1400 Gulden ertragen. Folglich wird das Verhältniß dieser angegebenen Kapitalien die zu findenden Zinsen vergrößern, und nach II. ist die Proportion diese : 3500 : 5870 = 1400 : x. Jetzt sehe man allein auf die verschiedene Zeit und nehme auf die Kapitale keine Rücksicht mehr, so ergibt sich, daß einerley Summe in 6 Jahren weniger Zinsen bringt, als in 8 Jahren. Daher macht dieser neue Umstand, daß das vierte Glied verringert wird, und nach III. steht nun alles so:

$$\begin{matrix} 3500 : 5870 \\ 8 : 6 \end{matrix} = 1400 : x.$$

Multiplicirt man nun hier (nach IV.) die ersten und zweyten Glieder miteinander, so entsteht Folgendes 28000 : 35220 = 1400 : x, woraus $x = \frac{35220 \times 1400}{28000}$ = 1761 Gulden wird.

Beweis. Aus dem Bisherigen (besonders aus §. 240, III.) folgt, daß nach obiger Aufgabe die Größe des sechsten Gliedes durch die Verhältnisse der beyden Paare gleichnamiger Dinge in §. 240, III. bestimmt werde, und daß folglich hier die einfache Regel Detri (§. 224.)

zweymal angebracht werden müsse. Nach Diesem fand man die erste Proportion in obigem Beyspiele auf folgende Art : 3500 : 5870 = 1400 : x, woraus x = $\frac{5870 \times 1400}{3500}$ geworden wäre. Allein dieses x ist noch nicht das zu findende unbekannte in obiger Aufgabe, sondern muß erst noch durch das zweyte Verhältniß in III. bestimmt werden, welches Folgendes gibt 8 : 6 = $\frac{5870 \times 1400}{3500}$: x, worin x = $\frac{5870 \times 1400 \times 6}{3500 \times 8}$ = 1761 wie oben wird. — Weil sich nun dieser Beweis, wie man leicht einsieht, nicht auf die Zahlen des gegenwärtigen Beyspiels allein beschränkt, sondern vielmehr ganz allgemein von allen andern Fällen auf eine ähnliche Art geführt werden kann, so ist die obige Auflösung gerechtfertiget.

§. 242. Beyspiele zur Uebung. I. Wie groß muß ein Kapital seyn, welches in 8 Jahren 2520 Gulden Zinsen bringt, wenn 6800 Gulden in 6 Jahren 340 Gulden Interessen geben?

Weil hier die Größe eines Kapitals gesucht wird, so ist das gegebene Kapital von 6800 Gulden das dritte Glied der Proportion. Nimmt man nun auf die Verschiedenheit der Zeit keine Rücksicht, so ist klar, daß ein Kapital, welches 2520 Gulden Zinsen geben soll, größer seyn muß, als ein anderes, welches in eben der Zeit nur 340 Gulden Interessen erträgt. Folglich ist der erste Ansatz dieser : 340 : 2520 = 6800 : x.

Sieht man hingegen auf die Zeit, so muß man fragen : Wie groß wird ein Kapital seyn, welches in 8 Jahren eine gewisse Menge Zinsen gibt, wenn 6800 Guld. in 6 Jahren eben so viele Interessen ertragen? —

Hier wird das zu findende Kapital kleiner als 6800 Guld. werden, da es länger auf Zinsen liegt, und das neue Verhältniß, welches in obige Proportion kömmt, ist dieses 8 : 6. Folglich wird der ganze Ansatz dieser

340 : 2520 = 6800 : x

8 : 6

daher 2720 : 15120 = 6800 : x, und

$$x = \frac{15120 \times 6800}{2720} = 37800 \text{ Gulden.}$$

II. Wenn 18 Personen in 17 Monaten 2350 Guld. zu ihrem Unterhalte brauchen; wie viel werden 64 Personen in 14 Monaten bedürfen?

Weil hier eine gewisse Summe von Gulden gesucht wird, so ist die gegebene von 2350 Gulden das dritte Glied. Vergleicht man die verschiedene Anzahl von Personen mit demselben, so ist klar daß 64 Menschen in der nämlichen Zeit mehr als 18 brauchen, daß folglich das Verhältniß 18 : 64 werde. Wird hingegen die Zeit in Anschlag gebracht, so ergibt sich, daß man in 14 Monaten weniger, als in 17 bruche, daß folglich dieses Verhältniß = 17 : 14 wird. Der ganze Ansatz ist daher dieser

18 : 64 = 2350 : x

17 : 14, folglich

306 : 896 = 2350 : x, welches

$$x = \frac{896 \times 2350}{306} = 6881 \tfrac{7}{153} \text{ Gulden gibt.}$$

III. Wenn 24 Personen täglich 7 Stunden arbeiten, so vollenden sie ein gewisses Werk binnen 30 Tagen. Wie viele Arbeiter wird man haben müssen, um dieses Werk in 40 Tagen zu vollenden, wenn sie täglich 9 Stunden arbeiten?

Aus dem Sinne dieser Aufgabe erhellet, daß das

dritte Glied die gegebene Zahl von 24 Arbeitern, folglich sowohl das Verhältniß der Stunden, als auch jenes der Tage vom Größern zum Kleinern werden müsse. Daher ist der Ansatz dieser

$9 : 7 = 24 : x$
$40 : 30$, folglich
$360 : 210 = 24 : x$, welches

$x = \frac{210 \times 24}{360} = \frac{504}{36} = 14$ gibt. — Wenn die Rechnung für x eine ganze Zahl und einen ächten Bruch gäbe, so müßte man, weil sich hier kein Theil eines Arbeiters denken läßt, die nächstfolgende ganze Zahl nehmen.

IV. Zwey Personen messen in 8 Stunden 40 Stecken Holz. Wie viel Männer muß man haben, um 680 Stecken innerhalb 6 Stunden auszumessen?

Die gegebenen 2 Männer geben das dritte Glied, und es folgt, daß sowohl das Verhältniß der Stunden, als jenes der zu messenden Stecken vom Kleinern zum Größern seyn werde. Folglich steht der Ansatz so:

$6 : 8 = 2 : x$
$40 : 680$, welches
$240 : 5440 = 2 : x$ gibt, woraus

$x = \frac{5440 \times 2}{240} = \frac{1088}{24} = 45\frac{1}{3}$ wird, wofür man 46 setzen muß.

§. 243. Anmerkung. I. Sollten bey dem Ansatze der gegebenen Glieder in der Regel Dequinque Fälle vorkommen, welche von der Art der in §§. 212, I. 213, 214. genannten sind, so muß man sich zur Abkürzung der Rechnung der dortigen Weisung bedienen. Es ist überhaupt eine sehr nützliche Uebung für Anfänger, sich in Auflösung solcher Fälle eine besondere Fertigkeit zu erwerben.

II. Da bey jeder Regel Dequinque aus funf gegebenen Stücken das verhältnißmäßige sechste gesucht und auch gefunden

wird, so ist klar, daß irgend fünf dieser Größen die sechste jedesmal bestimmen müßen. Daher lassen sich aus jeder solchen Aufgabe noch fünf andere Fragen, bilden. Die Bildung dieser Fragen durch ihre Einkleidung in Worte ist eine sehr lehrreiche Uebung für Anfänger. Weil jedoch unter diesen sechs Größen drey Paare von gleichartigen sind, so entstehen eigentlich auch nur Drey Hauptfragen, deren jede sich aber wieder in zwey ähnliche abtheilt. Zum Beyspiele diene die Frage in §. 242, I.

1.) Wie groß muß ein Kapital seyn, welches in 8 Jahren 2520 Gulden Zinsen bringt, wenn 6800 Gulden in 6 Jahren 340 Gulden Interessen geben? Antwort: 37800 fl.

2.) Wie lange muß ein Kapital von 37800 fl ausgeliehen seyn, um 2500 fl als Zinsen zu bingen, wenn 6800 fl in 6 Jahren 340 fl Interessen geben? Antwort: 8 Jahre.

3.) Wie viele Zinsen wird ein Kapital von 37800 fl in 8 Jahren tragen, wenn man von 6800 fl. in 6 Jahren 340 fl. Interessen erhält? Antwort: 2520 fl.

Auf gleiche Weise lassen sich diese Fragen auch stellen, um entweder das Kapital von 6800 fl. oder die Zeit von 6 Jahren, oder die Zinsen von 340 fl. als viertes Glied zu finden.

§. 244. Zusatz. Oefters hat der Fall Statt, daß man aus mehr als fünf gegebenen Dingen ein verhältnißmäßiges Unbekanntes finden soll. Die Regel zur Auflösung dieser Aufgaben ist hier immer die nämliche wie oben (§. 242), nur mit dem Unterschiede, daß für jedes neue Paar von Gliedern auch ein neues Verhältniß in den Ansatz kömmt, dessen Glieder nach der obigen Weisung geordnet werden. Ein Beyspiel wird dieses deutlicher machen. Man fragt: wie groß muß ein Kapital seyn, welches innerhalb 10 Jahren zu 4 Procent 5300 Gulden Interessen bringt, wenn eine Summe von 6500 Gulden binnen 6 Jahren zu 5 Procent 1950 Guld. Zinsen gibt? — Hier sind sieben Dinge angegeben, man

sucht das verhältnißmäßige achte. Von 6 derselben sind immer zwey unter sich, und das siebente ist mit dem zu findenden von einerley Art. Diese sechs Glieder geben drey Verhältnisse, deren jedes (in Vergleichung mit dem dritten) die Größe des unbekannten achten bestimmen hilft. Sieht man zuerst allein auf die 10 und 6 Jahre, so wird das zu findende Kapital kleiner als 6500 Guld., folglich das erste Verhältniß = 10 : 6. Nimmt man nun auf die 4 und 5 Procent Rücksicht, so wird nach diesem $x > 6500$ Guld., folglich das zweyte Verhältniß = 4 : 5. Betrachtet man endlich die 5300 Guld. und 1950 Guld. Interessen, so wird hieraus wieder $x > 6500$ Guld.; daher das Verhältniß wieder 1950 : 5300. Der Ansatz ist folglich dieser

$$\left.\begin{array}{r} 10 : 6 \\ 4 : 5 \\ 1950 : 5300 \end{array}\right\} = 6500 : x$$

Folglich $10 \times 4 \times 1950 : 6 \times 5 \times 5300 = 6500 : x$, welches $x = \frac{6 \times 5 \times 5300 \times 6500}{10 \times 4 \times 1950} = 13250$ Guld. gibt.

§. 245. Anmerkung. Aus dem Bisherigen erhellet überhaupt, daß für jedes Paar gleichnamiger Dinge, welche nebst den fünf angegebenen, noch vorkommen können, immer ein neues Verhältniß mehr in den Ansatz kommen werde. Oft hat auch der Fall Statt, daß die Anzahl der in der Aufgabe enthaltenen Dinge dadurch vermindert wird, daß man mehrere in einander multipliciren muß, ehe die Rechnung ausgeführt werden kann. Wenn z. B. der Körperraum einer Mauer, eines Grabens oder dergleichen, nach Länge, Breite und Tiefe gegeben ist, so muß man (nach Gründen, deren Richtigkeit hier unbewiesen angenommen werden muß) um die ganze Größe dieser Räume zu bestimmen, ein Product aus Länge, Breite und Tiefe machen, weil sich diese Producte eben so verhalten, wie die Räume zu welchen diese drey Ausdehnungen als Facto-

ren gehören. Man fragt: In wie viel Zeit werden 20 Arbeiter eine Mauer, welche 35 Schuhe lang, 12 Schuhe hoch, und 3 Schuhe breit ist, aufführen, wenn 12 Arbeiter eine andere Mauer von 48 Schuhe Länge, von 8 Schuhe Höhe, und von 2 Schuhe Dicke binnen 20 Tagen errichten? Um hier die ganze Größe von beyden Mauern zu finden, muß man Länge, Breite und Dicke einer jeden mit einander multipliciren. Dies gibt, für die Größe der ersten Mauer, ein Product $= 35 \times 12 \times 3 = 1260$, und für die letzte $= 48 \times 8 \times 2 = 768$. Durch dieses Verfahren ist also obige Frage in eine gewöhnliche Aufgabe von 5 Sätzen verwandelt worden, und der Ansatz ist (nach §. 241.) dieser

$$\left.\begin{array}{l} 20 : 12 \\ 768 : 1260 \end{array}\right\} = 20 : x, \text{ und } x =$$

$$\frac{12 \times 1260 \times 20}{768 \times 20} = \frac{12 \times 1260}{768} = 19\tfrac{528}{768} \text{ Tage, d. h.}$$

beynahe 20 Tage.

§. 246. Anmerkung. Da die Proportionsaufgaben auch vermittelst der sogenannten Reesischen Regel aufgelöset werden, so soll in den folgenden §§ das Wesentlichste davon beygebracht werden.

§. 247. Erklärung. Alle Fragen, welche bey der Regel Dequinque verkommen, lassen sich in zwey Sätze fassen, wovon der eine der Bedingnißsatz, der andere aber der Fragsatz genannt werden kann. Bedingnißsatz heißt jener Theil der Aufgabe, welcher die drey gegebenen unter sich ungleichartigen Glieder enthält und die Bedingniß ausspricht, auf welche sodann die Frage gegründet ist; den Fragsatz aber nenne ich jenen Theil der Aufgabe, welcher nur zwey der gegebenen Glieder enthält und die Frage ausspricht, welche eigentlich beantwortet werden soll. Zur Erläuterung dieser Erklärung sey die Aufgabe diese:

Was kostet der Transport von 875 ℔ auf eine Entfernung von 18 Stunden Wegs,

wenn man für 600 ℔ auf eine Entfernung von 20 Stunden Wegs 9 Gulden zu zahlen hat?

Hier heißt der Bedingnißsatz so: Wenn 600 ℔ auf 20 Stunden Wegs zu transportiren 9 Gulden kosten, und der Fragsatz lautet: Was wird der Transport von 875 ℔ auf 18 Stunden Wegs kosten?

Bey einer kleinen Ueberlegung wird es dem Anfänger leicht seyn, jede Frage der Regel Dequinque nach diesen beyden Sätzen zu ordnen.

Betrachtet man den Fragsatz, so ergibt sich, daß eines seiner beyden Glieder vorzüglich die Frage veranlaßt. Dieses Glied heisse das Frag-Glied. In dem vorigen Beyspiele sieht man sogleich, daß die zu transportirenden 875 ℔ dieses Frag-Glied bilden, weil es darauf ankömmt, die Transportkosten dieses Gewichts zu finden.

§. 248. Zusatz. I. Sollte man die Aufgabe des vor. §. nach der obigen Vorschrift (§. 241.) auflösen, so entständen folgende Verhältnisse:

600 ℔ : 875 ℔ = 9 fl : x fl 600 ℔ : 875 ℔ = 9 fl : x fl, und 20 Stund. : 18 Stund. folglich

$600 \times 20 : 875 \times 18 = 9 : x$, oder $x \times 600 \times 20 = 875 \times 18 \times 9$, woraus der Werth für $x = \frac{875 \times 18 \times 9}{600 \times 20}$ gefunden wird.

II. In dem Ausdrucke $x \times 600 \times 20 = 875 \times 18 \times 9$ stehen die Factoren in einer wagrechten Reihe nebeneinander. Ordnet man sie nun, nach beyfolgendem Muster, zur Rechten und Linken eines gezogenen Senkstrichs untereinander; nämlich:

x (Gulden)	875 (Pfunde)
600 (Pfunde)	18 (Stunde)
20 (Stunde)	9 (Gulden)

so sieht man sogleich, daß der Werth von x gefunden wird, wenn man das Product aller Glieder zur Rechten mit dem Producte aller Glieder zur Linken dividirt.

III. Da diese Berechnung von x sehr bequem ist, so ist nur noch die Regel zu entwickeln, nach welcher die gegebenen Glieder zur Rechten und zur Linken des Senkstrichs zu ordnen sind. Diese Stellung der Glieder nennt man den Reesischen Ansatz.

§. 249. Aufgabe. Wenn die Glieder in der Regel Dequinque gerade Verhältnisse bilden, dieselbe nach dem Reesischen Ansatze zu ordnen.

Auflösung. I. Man gebe der Frage die Stellung der Sätze, daß der Bedingnißsatz (§. 247.) zuerst steht und der Fragsatz auf ihn folget;

II. Nachdem ein Senkstrich gezogen worden ist, setze man das unbekannte Glied x oben zur Linken und zur Rechten in gleicher Höhe das Frag-Glied (§. 247.)

III. Unter das Frag-Glied setze man zuerst das in dem Fragsatze noch vorkommende Glied und sodann jenes Glied des Bedingnißsatzes, welches mit dem unbekannten Gliede x gleichartig ist.

IV. Unter das unbekannte Glied werden nun die noch in dem Bedingnißsatze gegebenen beyden Glieder gestellt. Dividirt man nun

V. Das Product aus den drey Zahlen zur Rechten des Senkstrichs durch das Product aus den beyden Zahlen zu dessen Linken, so ist der Quotient der Werth von x.

Beweis. Die Richtigkeit dieser Regeln fließt aus den bisherigen Sätzen (§. 247 u. 248) und bedarf keiner weitern Auseinandersetzung.

Beyspiele. I. Wieviel werden 15 Menschen in 9 Monaten brauchen, wenn die Ernährung von 8 Menschen in 19 Monaten 4000 Gulden erfodert?

Nach Regel I gebe man der Aufgabe folgende Stellung: Wenn 8 Menschen in 19 Monaten 4000 Gulden brauchen, wieviel bedürfen 15 Menschen in 9 Monaten?

Regel II gibt dieses:

x (Gulden)	15 (Menschen)

Nach Regel III wird:

x (Gulden)	15 (Menschen)
	9 (Monate)
	4000 (Gulden)

Nach Regel IV erhält man endlich den ganzen Ansatz:

x (Gulden)	15 (Menschen)
8 (Menschen)	9 (Monate)
19 (Monate)	4000 (Gulden)

Regel V gibt endlich $x = \frac{15 \times 9 \times 4000}{8 \times 19} = 3552 \frac{12}{19}$ Gulden, oder 3552 Gulden, 37 Kr. $3 \frac{11}{19}$ Pf.

Nach der obigen allgemeinen Weisung (§. 241.) wäre der Ansatz dieser:

$$\begin{array}{l} 8 : 15 = 4000 : x \\ 19 : 9 \end{array}$$

woraus $x = \frac{15 \times 9 \times 4000}{8 \times 19}$ wird, wie so eben auch gefunden worden ist.

II. Wieviele Zinsen wird ein Kapital von 2350

Gulden in 8 Jahren einbringen, wenn 1000 Gulden in 3 Jahren 250 Gulden Zinsen gibt?

Nach Anwendung obiger Regeln entsteht folgender Ansatz der Glieder:

x (Zinsen)	3250 (Guld. Kap.)
1000 (Guld. Kap.	8 (Jahre)
3 (Jahre)	250 (Guld. Zinsen)

Dies gibt folglich $x = \frac{3250 \times 8 \times 250}{1000 \times 3} = \frac{325 \times 8 \times 25}{30}$
$= \frac{325 \times 200}{30} = \frac{325 \times 20}{3} = \frac{6500}{3} = 2166\,\frac{2}{3}$
Gulden, oder 2166 Gulden 40 Kr.

Nach der frühern Regel (in §. 341.) wäre der Ansatz dieser:

$$\begin{array}{l} 1000 : 3250 = 250 : x \\ \quad 3 : 8 \end{array}$$

woraus für x derselbige Werth erhalten wird.

§. 250. Zusatz. Wenn die Glieder nach dem Reesischen Ansatze geordnet sind, so kann man jede Zahl zur Linken des Senkstrichs gegen jede beliebige zur Rechten desselben mit einem gemeinsamen Divisor, (wenn es sich thun läßt) ohne Rest aufdividiren, und hierdurch diese Glieder heben, wodurch der Werth von x nicht verändert wird, weil der Quotient derselbige bleibt, wenn man den Divisor und Dividenden mit der nämlichen Zahl aufdividirt. Dieses Verfahren dienet hier eben so zur Abkürzung der Rechnung, wie oben das Heben der Brüche, oder das Heben der Verhältnisse.

§. 251. Zusatz. Wenn Bruchglieder vorkommen, so kann man den Nenner jedes dieser Glieder dadurch sehr leicht wegschaffen, daß man mit diesem weggelassenen

Nenner irgend ein Glied jenseits des Senkstrichs multiplicirt. Denn es ist nun gerade so, als hätte man Divisor und Dividenden mit der nämlichen Zahl multiplicirt. Man fragt z. B. Wieviele Waare wird man für $8\frac{3}{4}$ Gulden erhalten, wenn man für $40\frac{1}{2}$ Gulden $64\frac{3}{4}$ Pfunde bekömmt? Diese Aufgabe bildet eine Regel Detri und kann ebenfalls nach der Reesichen Regel aufgelöset werden. Der Ansatz ist:

x	$8\frac{3}{4}$	Die Bruchglieder eingerichtet, gibt
$40\frac{1}{2}$	$64\frac{3}{4}$	
x	$\frac{35}{4}$	Die Nenner 2 u. 4 weggebracht, gibt
$\frac{81}{2}$	$\frac{259}{4}$	
x	70	Den andern Nenner 4 ebenfalls
324	$\frac{259}{4}$	
x	70	Beyderseits mit 2 gehoben, gibt
1296	259	
x	35	
648	259	

woraus $x = \frac{25 \times 259}{648} = 13$ Pfunde, 31 Lothe, $2\frac{50}{81}$ Quentchen.

§. 252. Zusatz. Wenn in der gegebenen Aufgabe (der Regel Dequinque) Glieder vorkommen, welche in einem verkehrten oder umgekehrten Verhältnisse stehen, (§. 223.) so werden dieselbe auch in verkehrter Ordnung zur Seite des gezogenen Senkstrichs gesetzt: d. h. jenes Glied, welches bey dem geraden Verhältnisse zur Rechten stände, wird nun auf die linke Seite gestellt, und umgekehrt. Der Grund dieses Verfahrens ist leicht einzusehen. Folgendes Beyspiel soll es erläutern.

Zur Vollendung einer gewissen Arbeit sind 18 Menschen 10 Tage lang beschäftiget, wenn sie täglich 8 Stunde arbeiten. In wieviel Zeit werden 14 Menschen eben diese Arbeit, bey täglicher 12 stündigen Arbeitszeit vollenden?

x (Tage)	18 (Menschen)
14 (Menschen)	8 (Stunden)
12 (Stunden)	10 (Tage)

gehoben: x	3	
7	4	
2	10	oder

x	3	
7	4	
1	5	folglich

$$x = \frac{3 \times 4 \times 5}{7} = \frac{60}{7} = 8\tfrac{4}{7} \text{ Tage.}$$

Da hier sowohl die Zahl der Arbeiter, als auch die Menge der täglichen Arbeitsstunden im umgekehrten Verhältnisse der Vollendungszeit stehen, so mußten auch die Glieder in verkehrter Ordnung zur Rechten und Linken des Senkstrichs gesetzt werden. Es ist Anfängern sehr zu rathen, sich in dem Ansatze und in der Auflösung solcher Ausgaben zu üben. Die allgemeine Regel heißt: Bey geraden Verhältnissen hat der gewöhnliche Ansatz (§. 249.) bey verkehrten Verhältnissen aber der umgekehrte Ansatz Statt.

IV. Die gesellschaftliche Theilrechnung.

§. 253. Erklärung. Die Gesellschaftsrechnung (gesellschaftliche Theilrechnung) begreift alle jene Fälle unter sich, wo man a) bald aus einer willkührlichen Annahme, bald b) aus Gründen

der natürlichen Billigkeit eine gegebene Zahl in mehrere Theile zerlegen soll, welche in einem bestimmten Verhältnisse gegen einander stehen.

Erläuterung zu a).

Es stirbt Jemand mit Hinterlassung eines Vermögens von 25000 Gulden und setzt drey Personen: A, B und C, unter der Bedingung zu Erben ein, daß, wenn der A 7 Gulden bekömmt, der B immer 5 Gulden, und der C 2 Gulden haben solle. Man fragt, wieviel wird jeder Erbe bekommen? Offenbar sucht man, um dem Willen des Verstorbenen Genüge zu leisten, hier drey Zahlen, welche sich wie 7 : 5 : 2 verhalten und zusammengenommen = 25000 Gulden betragen.

Zu b). Vier Handelsleute rüsteten ein Schiff mit Waaren aus, deren Werth sich auf 150000 Guld. belief. Der erste trug hierzu 60000 Guld., der andere 30000 Guld., der dritte 49000 Guld., und der vierte 11000 Guld. bey. Durch den Verkauf dieser Waaren gewannen sie eine Summe von 64900 Gulden. Wie groß wird der Gewinn jedes Einzelnen seyn? —

Weil es hier offenbar der Billigkeit gemäß ist, daß der Gewinn im Verhältniß der Zulage stehen müsse, so heißt die Aufgabe so viel, als man soll die Zahl 64900 in 4 Theile theilen, welche sich so gegen einander verhalten, wie die vier einzelnen Zulagen der Kaufleute.

§. 254. Anmerkung. Die Auflösung aller Fälle, welche bey der gesellschaftlichen Theilrechnung vorkommen, beruht daher auf der Aufgabe, welche lehrt, wie eine gegebene Zahl in mehrere andere eingetheilt werden kann, welche zusammengenommen jener gleich sind, und in einem bestimmten Verhältnisse gegen einander stehen.

§. 255. Aufgabe. Jede gegebene Zahl in eine beliebige Menge von Theilen zu theilen, welche in einem bestimmten Verhältnisse gegen einander stehen, und zusammengenommen die erste Zahl wieder ausmachen.

Auflösung. I. Man bringe die Zahlen, *welche* das Verhältniß, bestimmen, nach welchem die gegebene getheilt werden soll, d. h. die Verhältnißzahlen, in eine Summe.

II. Man schließe nun so:, wie sich die Summe aller Verhältnißzahlen zu der zu theilenden Zahl verhält, eben so verhält sich jede dieser Verhältnißzahlen einzeln zu dem ihr entsprechenden Theile der zu theilenden Zahl.

III. Man bilde so viele dieser Proportionen (nach II.) als Verhältnißzahlen gegeben sind, bestimme in jeder derselben aus den drey ersten Gliedern (nach §. 218. I.) das vierte, so findet man alle verhältnißmäßige Theile der zuerst gegebenen Hauptzahl.

Erläuterung und Beweis.

Man soll die Zahl 48 in zwey Theile theilen, welche sich wie 3 : 5 verhalten. Offenbar wird dieses geschehen, wenn man die 48 in $3 + 5 = 8$ Theile eintheilt, und nachher einmal 3, und einmal 5 solcher Theile nimmt. Denn $3 \times \frac{48}{8} : 5 \frac{48}{8} = 3 : 5$ (§. 162.) Auch ist ferner $3 \times \frac{48}{8} + 5 \times \frac{48}{8} = 8 \times \frac{48}{8} = 48$. Folglich sind hierdurch die beyden Bedingnisse der Aufgabe erfüllt, d. h. $\frac{3 \times 48}{8}$ und $\frac{5 \times 48}{8}$ sind die zwey zu suchenden Zahlen. Nun ist aber die erste das vierte Glied der Proportion $8 : 48 = 3 : \frac{3 \times 48}{8} = \frac{144}{8} = 18$ (nach §. 218, I.), und die andere das letzte Glied der Proportion $8 : 48 = 5 : \frac{5 \times 48}{8} = \frac{240}{8} = 30$ (nach

§. 218, I.) Auch sind hier die drey ersten Glieder diejenige Zahlen, welche es nach der obigen Auflösung seyn sollen. Folglich ist diese Auflösung richtig, und die zu findenden Zahlen sind 18 und 30. Sie leisten auch der Aufgabe vollkommen Genüge, weil $3 : 5 = 18 : 30$, und ferner $18 + 30 = 48$ ist.

Es bedarf wohl kaum einer Erinnerung, daß diesem Beweise, obgleich er nur an einem einzelnen Falle geführt wurde, doch nichts an der erforderlichen Allgemeinheit fehlet. Denn es wurden keine besondere Größen von Zahlen dabey voraus gesetzt. Daher gilt er von allen möglichen Zahlen, welche man sich verstellen will. Desgleichen erhellet, daß sich derselbe auch keineswegs auf den Fall einschränkt, wo eine Zahl in zwey verhältnißmäßige Theile getheilt werden soll; sondern daß man sich vielmehr eben der Gründe bedienen kann, um die Richtigkeit der Auflösung für jene Fälle zu zeigen, wo diese Zahl in irgend eine Menge Theile zerlegt werden soll, deren Verhältniß angegeben ist.

Beyspiele. I. Die Zahl 468 soll in 3 Theile, welche sich wie $4 : 7 : 9$ verhalten, eingetheilt werden. Die Proportionen zur Auflösung sind folgende.

a) $4 + 7 + 9 : 468 = 4 : x$, woraus $x = \frac{468 \times 4}{4 + 7 + 9} = \frac{1872}{20} = 93 \frac{3}{5}$.

b) $4 + 7 + 9 : 468 = 7 : y$, wo $y = \frac{468 \times 7}{4 + 7 + 9} = \frac{3276}{20} = 163 \frac{4}{5}$.

c) $4 + 7 + 9 : 468 = 9 : z$, wo $z = \frac{468 \times 9}{4 + 7 + 9} = \frac{4212}{20} = 210 \frac{3}{5}$.

Diese gefundene 3 Zahlen haben die Eigenschaft, daß

1) $93\frac{3}{5} : 163\frac{4}{5} : 210\frac{3}{5} = 4 : 7 : 9$ und

2) $93\frac{3}{5} + 163\frac{4}{5} + 210\frac{3}{5} = 468$.

II. Sollte 485 in 4 Theile, welche sich wie 2 : 3 : 5 : 8 verhalten, eingetheilt werden, so sind die Proportionen hierzu diese:

a) $2 + 3 + 5 + 8 : 468 = 2 : w$

b) $2 + 3 + 5 + 8 : 468 = 3 : x$

c) $2 + 3 + 5 + 8 : 468 = 5 : y$

d) $2 + 3 + 5 + 8 : 468 = 8 : z$, und man findet, wenn die Rechnung ausgeführt wird, $w = 52$; $x = 78$; $y = 130$ und $z = 208$, welches die verhältnißmäßigen Theile sind, in welche die Zahl 468 getheilt worden ist. Die Probe darüber ist leicht anzustellen.

§. 256. Auflösung der Beyspiele in §. 253.

I. Um die Erbschaftstheile x, y und z des A, B, und C zu bestimmen, muß man (nach §. 255.) folgende drey Proportionen auflösen.

a) $7 + 5 + 2 : 25000 = 7 : x$

b) $7 + 5 + 2 : 25000 = 5 : y$

c) $7 + 5 + 2 : 25000 = 2 : z$.

Aus a) wird $x = \frac{25000 \times 7}{7 + 5 + 2} = \frac{175000}{14} =$ 12500 Guld. für A.

Aus b) ist $y = \frac{25000 \times 5}{7 + 5 + 2} = \frac{125000}{14} = 8928\frac{4}{7}$ Guld. für B.

Aus c) ist $z = \frac{25000 \times 2}{7 + 5 + 2} = \frac{50000}{14} = 3571\frac{3}{7}$ Gulden für C.

Diese Werthe für x, y und z haben, wie man

leicht durch eine Probe ersehen kann, die Eigenschaften, welche das obige Beyspiel fodert.

II. Wenn die vier Kaufleute A, B, C und D, und die zu suchenden Gewinne eines jeden w, x, y und z heißen, so bekömmt man, nachdem die Zuschüsse Aller in eine Summe gebracht worden, folgende vier Proportionen:

a) $150000 : 64900 = 60000 : w$ oder $15 : 64900 = 6 : w$ (§. 212, I.) woraus $w = \frac{64900 \times 6}{15} = 25960$ Gulden.

b) $150000 : 64900 = 30000 : x$, oder $15 : 64900 = 3 : x$ (§. 112, I.) woraus $x = \frac{64900 \times 3}{15} = 12980$ Gulden.

c) $150000 : 64900 = 49000 : y$, oder $150 : 64900 = 49 : y$ (§. 212, I.) woraus $y = \frac{64900 \times 49}{150} = 21200 \frac{2}{3}$ Gulden.

d) $150000 : 64900 = 11000 : z$ oder $150 : 64900 = 11 : z$ (§. 212, I.) woraus $z = \frac{64900 \times 11}{150} = 4759 \frac{1}{3}$ Gulden.

Von der Richtigkeit dieser Zahlen kann man sich wieder durch die bekannte Probe überzeugen.

§. 257. Anmerkung. Man kann sich bey diesen Rechnungen der Mühe überheben, die letzte Proportion besonders aufzulösen, wenn man eine Summe aus allen bereits schon gefundenen vierten Gliedern macht, und dieselbe von der einzutheilenden Zahl abzieht. Der hierdurch entstehende Rest ist das vierte Glied der letzten Proportion. So wird eine Summe von den in (§. 256, II.) gefundenen Werthen für w, x und y, oder $25960 + 12980 + 21200 \frac{2}{3} = 60140 \frac{2}{3}$. Und $64900 - 60140 \frac{2}{3} = z = 4759 \frac{1}{3}$, wie daselbst durch die Auflösung der Proportion gefunden wur-

de. Jedoch muß man, um sich dieses Mittels mit Vortheil bedienen zu können, überzeugt seyn, daß in den ersten Proportionen keine Rechnungsfehler begangen worden sind. Denn wenn dieses wäre, so würde derselbe den durch die Subtraction gefundenen Werth ebenfalls unrichtig machen, und die gewöhnliche Probe reichte nicht hin, diese Unrichtigkeit zu entdecken.

§. 258. Anmerkung. Die fernere Anwendung der bisher vorgetragenen Regeln auf die im gemeinen Leben häufig vorkommenden Fälle könnte man hier, wenn nicht zu befürchten wäre, zu weitläufig zu werden, durch viele Beyspiele zeigen. Da man aber Sammlungen solcher Aufgaben in besondern Büchern findet, und es nebst diesem auch keine Schwierigkeit ist, sich selbst dergleichen zu entwerfen, so überläßt man diese Uebung dem Anfänger.

§. 259. Erklärung. Der Werth eines Kapitals hängt nicht allein von seiner absoluten Größe, sondern zugleich von der Zeit ab, während welcher es zur Betreibung eines gemeinschaftlichen Handels verwendet wird. Es erhellet zugleich, daß eine und die nämliche Summe in der doppelten Zeit den zweyfachen, in der dreyfachen Zeit den dreyfachen Gewinn u. s. w. ertragen werde, d. h. es erhellet, daß der Verhältnißwerth eines Kapitals durch ein Product aus der absoluten Größe desselben in die Zeit, während welcher dasselbe zu irgend einem Handel angelegt ist, bestimmt werden müsse. Diese Betrachtung gibt Veranlassung zur folgenden Aufgabe.

§. 260. Aufgabe. A, B und C treten in einen Gesellschaftshandel. Der A erlegte 2000 Gulden und ließ sie 6 Monate in der gemeinschaftlichen Kasse. Der B schoß gleich anfangs 3500 Guld., welche 7 Monate im Handel blieben. Der C endlich gab 1850 Guld. und diese waren 9 Monate in der Handlung. Der gemeinschaftliche Gewinn war 1400 Gulden. Wieviel bekömmt Jeder?

Auflösung. Nach §. 259. ist der Verhältnißwerth der Zulage des A = 2000 × 6 = 12000, jener des B = 3500 × 7 = 24500 und endlich der des C = 1850 × 9 = 16650. Die Summe dieser drey Producte ist = 53150; folglich bekömmt man folgende Proportionen.

a) 53150 : 1400 = 12000 : x dem Gewinn des A.

b) 53150 : 1400 = 24500 : y dem Gewinn des B, und

c) 53150 : 1400 = 16650 : z, dem Gewinn des C. Die Rechnung gibt

$$x = \frac{1400 \times 12000}{53150} = 316 \tfrac{460}{5315} \text{ Guld.}$$

$$y = \frac{1400 \times 24500}{53150} = 645 \tfrac{1825}{5315} \text{ Guld.}$$

$$z = \frac{1400 \times 16650}{53150} = 438 \tfrac{3030}{5315} \text{ Guld.}$$

Die Richtigkeit dieses Verfahrens beruht hauptsächlich auf §. 259.

§. 261. Anmerkung. Die Auflösung der Aufgabe des vorigen §. dient zum Muster, wie man sich in dergleichen Fällen zu verhalten habe. Oft kommen zusammengesetztere Fragen vor, wenn ein oder das andere Mitglied der Gesellschaft nach Ablauf einer gewissen Zeil entweder ein neues Kapital hinzuschießt, oder einen Theil des bereits erlegten wieder hinwegnimmt, oder eine solche Abänderung öfters wiederholt. Folgende Aufgabe wird dieses mehr erläutern.

§. 262. Aufgabe. A, B und C treten in einen gemeinschaftlichen Handel. Der A schoß hierzu 3000 Gulden in die Gesellschaftscasse. Nach Verkauf von 6 Monaten nimmt er wieder 1000 Gulden heraus, und nach 8 Monaten, vom Ablauf der ersten 6 Monate gerechnet, gibt er noch 500 Guld. zum Handel. Der B er-

legte gleich anfangs eine Summe von 4500 Gulden und schoß nach 10 Monaten noch 500 Guld. hinzu. Der C endlich gab 2500 Guld. und ließ sie 24 Monate lang, bis zu dem Ende des Geschäftes, in der Handlung. Mit diesen einzelnen Zulagen gewannen sie eine Summe von 3560 Guld. Wieviel ist der Gewinn jedes Einzelnen?

Auflösung. I. Die 3000 Guld. des A blieben 6 Monate in der Handlung; folglich ist (nach §. 259.) der verhältnißmäßige Werth dieses Kapitals $= 3000 \times 6 = 18000$. Nun kamen 1000 Gulden von diesen 3000 hinweg; daher blieben noch 2000 Guld. übrig, welche 8 Monate ohne Veränderung im Handel waren, deren Werth also $= 16000$ ist. Endlich kamen noch 500 Gulden hinzu, daher wurden aus den 2000 Guld. nunmehr 2500 Gulden, deren Werth, da sie noch 10 Monate bey der Handlung blieben, $= 2500 \times 10 = 25000$ ist. Der ganze verhältnißmäßige Zuschuß des A ist daher $= 18000 + 16000 + 25000 = 59000$.

II. Der B gab sogleich 4500 Guld., welche 10 Monate im Handel blieben, deren Werth also $= 45000$ ist (§. 259.). Nun erlegte er noch 500 Guld., wodurch $4500 + 500 = 5000$ Guld. in der Handlung waren, welche, da sie noch 14 Monate in der Casse blieben, einen Werth von $5000 \times 14 = 70000$ hatten. Der Antheil des B betrug also $45000 + 70000 = 115000$.

III. Der C endlich gab 2500 und ließ sie bis zu Ende des Geschäftes, d. h. 24 Monate lang im Handel. Daher ist der Werth dieser Zulage $= 2500 \times 24 = 60000$.

IV. Die fernere Auflösung dieser Aufgabe beruht

nun darauf, daß der gemeinschaftliche Gewinn von 3560 Guld. in drey Theile getheilt wird, die sich wie 59000 : 115000 : 60000; oder, welches einerley ist, wie 59 : 115 : 60 verhalten. Diese Rechnung (nach §. 255.) ausgeführt, gibt einen Gewinn für A = 897 $\frac{71}{117}$ Guld.; für den B = 1749 $\frac{67}{117}$ Guld., und für C = 912 $\frac{96}{117}$ Gulden.

Der Beweis über die Richtigkeit dieser Auflösung beruhet auf den Sätzen in §§. 255 — 260.

§. 263. Anmerkung. Um die Größe des verhältnißmäßigen Zuschusses von A (in §. 262.) zu bestimmen, könnte man auch so schließen: Wenn die 3000 Guld. während der 24 Monate des gemeinschaftlichen Handels nicht vermehrt oder vermindert worden wären, so hätten sie am Ende dieser Zeit offenbar einen Werth = 3000 × 24 = 72000. Weil nun aber nach Ablauf von 6 Monaten 1000 Gulden davon hinweggenommen wurden, so nahm man diese 1000 Guld. um 24 — 6 = 18 Monate länger in der Handlung an, als sie es eigentlich seyn können, wenn man den ganzen Verhältnißwerth = 72000 setzt. Nun ist aber der Werth von 1000 Guld. in 18 Monaten = 18000, folglich ist 72000 — 18000 = 54000 der Werth desjenigen, was der A bis hierher erlegte. Allein nach 14 Monaten schoß A noch 500 Guld. zu, welche 24 — 14 oder 10 Monate in der Handlung geblieben sind, deren Werth also = 5000 ist. Dieser, zu dem obigen gesetzt, gibt 54000 + 5000 = 59000 für den ganzen verhältnißmäßigen Zuschuß des A, wie oben §. 262. I. — Erläuterungen wie diese sind dem Anfänger sehr nützlich, indem sie ihn mit den Bedingnissen und der Auflösung dieser Aufgabe um so mehr bekannt machen.

V. Die Vermischungsrechnung.

§. 264. Erklärung. Die Vermischungsrechnung faßt jene Fälle in sich, wo entweder a) aus der Menge und dem Preise verschiedener zu vermischenden Dinge der Preis des gemischten Körpers über-

haupt, oder eines bestimmten Theils desselben; oder b) die verhältnißmäßige Hergabe mehrerer zu vermischenden Dinge gesucht wird, deren Preis (für eine bestimmte Menge) angegeben ist, um hieraus einen Körper, der von bestimmter Größe einen gegebenen Mittelpreis hat, zu erhalten.

Erläuterung zu a) Ein Wirth mischt 8 Maaß 10 Batzen-Wein, 12 Maaß 15 Batzen-Wein und 9 Maaß 12 Batzen-Wein zusammen. Man soll entweder den Werth des ganzen Gemisches, oder einer Maaß des gemischten Weines finden.

Zu b) Man will aus zwey Weingattungen, von deren einem die Maaß 18 Batzen und von dem andern 12 Batzen kostet, einen Wein so zusammenmischen, daß eine Maaß des Gemisches 16 Batzen werth seyn soll. Wie viel muß jede Gattung dazu hergeben?

§. 265. Aufgabe. Der Werth eines gewissen Maaßes von mehreren zusammenzumischenden Dingen und die Menge eines jeden derselben ist gegeben. Man soll hieraus den Werth der ganzen Mischung, oder eines bestimmten Theils derselben finden.

Auflösung. I. Man multiplicire den Werth des Maaßes eines jeden der gegebenen Körper mit einer Zahl, welche anzeigt, wie oft dieses Maaß in jedem dieser Dinge enthalten ist,

II. Alle diese einzelne Producte in I. bringe man in eine Summe, so ist diese der Werth des ganzen Gemisches,

III. Wird aber diese Summe in II. durch die Menge der Maaße aller gegebenen Dinge dividirt, so ist

der hieraus entstehende Quotient der Werth eines Maaßes vom Gemische.

IV. Um den Werth eines bestimmten Theils vom Gemische zu finden, multiplicire man die Summe in II. mit einem Bruche, welcher diesen Theil ausdrückt.

Beweis. Die Richtigkeit dieser Auflösung beruht auf dem Begriffe und den Anwendungen der Multiplication und Division, und bedarf keiner weitern Rechtfertigung.

Beyspiele.

I. Auflösung des Beyspiels in §. 264, a.

Der Werth des 8 Batzen-Weins, welcher zur Mischung kömmt, ist, da man 10 Maaße von demselben nimmt, $= 8 \times 10 = 80$ Batzen. Eben so jener der 12 Maaße des 15 Batzen-Weins $= 12 \times 15 = 180$ Batzen. Endlich jener der 9 Maaße vom 12 Batzen-Wein $= 9 \times 12 = 108$ Batzen. Weil nun das Gemische nur aus diesen drey Weinen besteht, so ist offenbar der Werth der ganzen Mischung $= 80 + 180 + 108 = 368$ Batzen. Allein dieses Gemische enthält nun auch $10 + 12 + 9 = 31$ Maaße, daher ist der Werth einer Maaß des gemischten Weines $= \frac{363}{31} = 11\frac{27}{31}$, oder beynahe 12 Batzen.

Wollte man den Werth irgend eines bestimmten Theils der Mischung, z. B. jenen des $\frac{2}{3}$ Theils finden, so wäre dieser $= 368 \times \frac{2}{3} = \frac{736}{3} = 245\frac{1}{3}$ Batzen, u. s. w.

II. Man vermischt drey Gattungen von Früchten. Von der ersten, wovon das Malter 5 Gulden kostet, nimmt man 12 Malter; von der zweyten, wovon das

Malter 7 Gulden gilt, nimmt man 18 Malter, und von der dritten, wovon ein Malter 9 Guld. kostet, nimmt man 10 Malter. Wieviel wird das ganze Gemische, und ein Malter desselben werth seyn? Hier ist

$5 \times 12 = 60$ Guld. der Werth der 1ten Gattung.
$7 \times 18 = 126$ Guld. — 2ten —
$9 \times 10 = 90$ Guld. — 3ten —

folglich 276 Guld. der Werth der ganzen Mischung; und, da $5 + 7 + 9 = 21$ Malter im Ganzen vorhanden sind, der Preis eines Malters vom Gemische $= \frac{276}{21} = 13\frac{1}{7}$ Guld.

§. 266. Anmerkung. Diese Rechnung hat auch eine besondere Anwendung bey Vermischung der Metalle. Um aber die hierhergehörigen Aufgaben verständlich zu machen, muß Folgendes vorbemerkt werden. Wenn ein Metall, z. B. Gold oder Silber, ohne alle fremartige Theile ist, so heißt es rein. Wird hingegen ein anderes Metall beygemischt, um dem ersten eine größere Stärke zu geben, so nennt man dieses beygeschmolzene Metall den Zusatz. So kömmt, aus der eben bemerkten Ursache, zu dem Silber ein Zusatz von Kupfer, um demselben eine stärkere Dauer zu geben. Das Silber erhält nach diesem einen größern oder geringern Werth, je nachdem die Menge des Zusatzes bey einerley Gewicht kleiner oder größer ist. Man nennt 16 Lothe reines Silber eine Mark und das reine Silber bekömmt den Namen sechzehnlöthig. Kommen unter 16 Lothe Gewicht nur 15 Lothe reines Silber und ein Loth Kupfer als Zusatz, so heißt das Silber fünfzehnlöthig. Sind bey 14 Lothe reinem Silber zwey Lothe Kupfer, so ist es vierzehnlöthig. So gibt es 13, 12, 11, 10 löthiges Silber, wobey immer die Zahl des löthigen die Menge des reinen Silbers, die Unterschiede dieser Zahl von 16 Lothen hingegen die Kupfertheile angeben, welche in den 16 Lothen gemischten Silbers enthalten sind.

§. 267. Aufgabe. Wie viellöthig wird eine Mischung seyn, welche aus 12 Lothen 10 löthigem, aus

8 Lothen 12 löthigem, aus 15 Lothen 13 löthigem und aus 10 Lothen 15 löthigem Silber besteht?

Auflösung. In dem 10 löthigen Silber sind 10 Theile reines Silber und 6 Theile Zusatz (§. 267.); folglich werden die 12 Lothe dieses Silbers $12 \times 10 = 120$ Theile reines Silber geben. Eben so sind in den 8 Lothen des zwölflöthigen Silbers $8 \times 12 = 96$, in den 15 Lothen des 13 löthigen Silbers $15 \times 13 = 195$ und in den 10 Lothen des 15 löthigen $10 \times 15 = 150$ Theile von reinem Silber enthalten. Daher wird die Summe des ganzen Gemisches $120 + 96 + 195 + 150 = 561$ reine Silbertheile geben. Allein die Mischung besteht aus $12 + 8 + 15 + 10 = 45$ Lothen Silber. Folglich kommen auf 1 Loth nur $\frac{561}{45} = 12\frac{21}{45}$ Theile von reinem Silber, oder das aus dieser Mischung entstandene Silber ist $12\frac{21}{45}$ oder $12\frac{7}{15}$ löthig.

Die Richtigkeit dieser Auflösung beruht größtentheils auf den gemeinen Begriffen der Multiplication und Division. Daher ist ein besonderer Beweis hierüber entbehrlich.

§. 268. Anmerkung. Die Aufgaben, wovon jene in vor. §. ein Muster ist, können auch dergestalt aufgelös't werden, daß man die Menge der Kupfertheile bestimmt, welche in der ganzen Mischung enthalten seyn müssen. So sind die Theile des Kupfers, welche in den Silbergattungen des vor. §. angegeben wurden, in der dortigen Ordnung, diese: Die 12 Lothe enthalten $12 \times 6 = 72$, die 8 Lothe geben $8 \times 4 = 32$, die 15 Lothe enthalten $15 \times 3 = 45$ und die 10 Lothe haben $10 \times 1 = 10$ Lothe Kupfer. Aber die ganze Zusammenmischung besteht aus 45 Lothen. Daher enthält ein Loth davon $\frac{159}{45} = 3\frac{24}{45}$ Kupfertheile Eine Probe von der Richtigkeit dieser Auflösung ist, daß $16 - 3\frac{24}{45} = 12\frac{21}{45}$ Theile reines Silber geben, wie im vor. §.

§. 269. Aufgabe. Zwey Materien A und C,

welche, bey einerley bestimmten Größe, die Preise a und c haben, sollen dergestalt zusammengemischt werden, daß der hieraus entstehende vermischte Körper B, von der nämlichen Größe, einen Mittelpreis b bekömmt; wobey noch angenommen wird, daß b von a und c umgleichviel unterschieden ist. Wie groß ist die Hergabe eines jeden der zu vermischenden Dinge?

Auflösung. Man nehme von jedem der zu vermischenden Körper gleichviel, d. h. die Hälfte von der Größe des zu findenden Körpers, so entsteht der gesuchte Körper B von der verlangten Größe und vom verlangten Mittelpreise.

Beweis. Nach der Annahme der Aufgabe ist $a - b = b - c$, d. h. der Werth des Körpers A ist um so viel größer, als der von B, um wie viel der Preis von C kleiner, als der von B ist. Hier sind also zwey gleiche Differenzen, folglich auch (§. 202.) zwey gleiche arithmetische Verhältnisse, d. h. eine arithmetische Proportion (§. 187.) Folglich ist auch $a + c = b + b = 2b$ (§. 197, II.) und $\frac{a+c}{2} = b$ (§. 200.), oder $\frac{a}{2} + \frac{c}{2} = b$. Daher wird der Mittelpreis herauskommen, wenn man die Hälfte des höhern und niedern zusammennimmt. Allein von $\frac{1}{2}$ A ist auch der Preis $= \frac{a}{2}$, und von $\frac{1}{2}$ B $= \frac{b}{2}$. Folglich ist die Auflösung richtig.

Daß man in der obigen Aufgabe an Statt bestimmter Zahlen Buchstaben setzte, geschah deswegen, um den Beweis dadurch allgemein zu machen. Denn man sieht wohl, daß ein Buchstabe, als willkührliches Zeichen, jede Größe, folglich auch jede Zahl vorstellen kann. Anwendungen auf besondere Fälle, zeigen folgende Beyspiele.

I. Von einem Weine, wovon die Maaß 10 Batzen und von einem andern, wovon eine Maaß 18 Batzen kostet, soll eine Maaß zusammengemischt werden, welche 14 Batzen werth ist. — Hier gibt nach der Anflösung jede Weingattung eine halbe Maaß zum Gemische. Es ist daher auch $\frac{10}{2} + \frac{18}{2} = 5 + 9 = 14$.

II. Von zwey Fruchtgattungen, deren erste im Malter 7 Gulden, deren andere im Malter 11 Gulden kostet, soll ein Malter zusammengemischt werden, welches 9 Gulden werth ist. Weil auch nun wieder die beyden Preise 7 und 11 von dem Mittelpreise 9 gleich weit entfernt sind, indem $9 - 7 = 11 - 9$, so gibt jede Fruchtgattung ein halbes Malter, wodurch das gemischte Malter einen Werth von $\frac{7}{2} + \frac{11}{2} = \frac{18}{2} = 9$ Gulden bekömmt, wie es die Aufgabe fodert.

§. 270. Zusatz. Sollte der Fall eintreten, daß man in §. 270, an Statt 1 Maaß, irgend eine bestimmte Menge von Maaßen zusammenmischen müßte, so ist begreiflich, daß jede Gattung hierzu die Hälfte hergeben muß. Wenn man z. B. aus 12 Batzen-Wein und aus 18 Batzen-Wein 25 Maaße 15 Batzen-Wein mischen sollte, so müßte jede Gattung $\frac{25}{2} = 12\frac{1}{2}$ Maaß hergeben. Nun hätte man $\frac{25}{2} \times 12 + \frac{25}{2} \times 18 = 25 \times 6 + 25 \times 9 = 150 + 225 = 375$. Und wirklich ist auch $15 \times 25 = 375$. — Aehnliche Auflösungen haben Statt, wenn andere Dinge auf diese Art vermischt werden sollen.

§. 271. Aufgabe. Zwey Körper, A und C, deren Preise, bey der nämlichen Größe, a und c sind, wo $a > c$ angenommen wird, sollen so vermischt werden, daß daraus ein Körper B von eben der Größe ent-

steht, der einen Mittelpreis b hat, welcher um ungleich viel von a und c entfernt ist. Wie groß ist die Hergabe von A und von C?

Auflösung. Man suche die Differenzen a — b und b — c, betrachte dieselbe als die Zähler zweyer Brüche, deren Nenner die Summe dieser Differenzen, oder a—b + b — c = a — c ist (§. 33, V.), so entstehen die Brüche $\frac{a-b}{a-c}$ und $\frac{b-c}{a-c}$ Verwechselt man nun diese Brüche, so ist $\frac{b-c}{a-c}$ die Hergabe des Körpers A und $\frac{a-b}{a-c}$ jene des Körpers C zur Mischung.

Beweis. Weil die Hergabe des Körpers A = $\frac{b-c}{a-c}$, so ist der Werth dieser Hergabe offenbar = $\frac{b-c}{a-c} \times a = \frac{(b-c) \times a}{a-c} = \frac{a \times b - a \times c}{a-c}$ (§§. 166, 93.), und da die Hergabe des Körpers C = $\frac{a-b}{a-c}$ ist, so wird ihr Werth in der Vermischung = $\frac{a-b}{a-c} \times c = \frac{a \times c - b \times c}{a-c}$ (§§. 166, 93). Folglich ist auch die Summe der beyden Hergaben, oder der Werth des ganzen Gemisches = $\frac{a \times b - a \times c + a \times c - b \times c}{a-c}$ (§. 150, I.) = $\frac{a \times b - b \times c}{a-c}$ (§. 33, V.) = $\frac{(a-c) \times b}{a-c}$ = b (§. 36, IV.). Allein der Werth des gemischten Körpers sollte auch nach der Aufgabe = b seyn, so wie die Summe der beyden Hergaben, oder $\frac{b-c}{a-c} + \frac{a-b}{a-c}$ = $\frac{b-c+a-b}{a-c}$ (§. 150, I.) = $\frac{a-c}{a-c}$ (§. 33, V.) = 1 seyn mußte. Folglich ist die obige Auflösung richtig.

Beyspiele. I. Aus zwey Weingattungen, wovon

die eine Maaß 12 Batzen und die andere 20 Batzen kostet, soll eine Maaß zusammengemischt werden, welche 15 Batzen werth ist. Wieviel muß von einer jeden genommen werden? — Hier ist $20 - 15 = 5$, $15 - 12 = 3$, endlich auch $20 - 12 = 8$; folglich die Hergabe des 12 Batzen-Weines $= \frac{5}{8}$ und jene des 20 Batzen-Weines $= \frac{3}{8}$. Beyde Werthe erfüllen auch die Foderungen der Aufgabe. Denn der Werth der Summe der Hergaben von beyden Weinen ist $\frac{5}{8} \times 12 + \frac{3}{8} \times 20 = \frac{60}{8} + \frac{60}{8} = \frac{120}{8} = 15$ Batzen und die Summen der Hergaben selbst ist $\frac{5}{8} + \frac{3}{8} = 1$.

II. Wieviel muß von einer Fruchtgattung, wovon das Malter 7 Gulden und von einer andern, von welcher ein Malter 13 Gulden kostet, genommen werden, um ein Malter zu bekommen, welches 9 Gulden werth ist? — Die Unterschiede geben $9 - 7 = 2$, $13 - 9 = 4$ und $13 - 7 = 6$. Daher gibt die wohlfeilere Fruchtgattung $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ und die andere $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. Nach dieser Hergabe ist auch wieder $\frac{2}{3} \times 7 + \frac{1}{3} \times 13 = \frac{14}{3} + \frac{13}{3} = \frac{27}{3} = 9$ Gulden. Auch ist $\frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1$ Malter.

III. Man soll aus 10 löthigem und 15 löthigem Silber 12 löthiges zusammenmischen. Wie viel muß jede Sorte hergeben, um 1 Loth gemischtes Silber zu bekommen? Die Differenzen geben hier $12 - 10 = 2$, $15 - 12 = 3$ und $15 - 10 = 5$. Daher kommen von dem 10 löthigen Silber $\frac{3}{5}$ Lothe und von dem 15 löthigen nur $\frac{2}{5}$ Lothe zur Mischung von einem Lothe. Nun geben aber die $\frac{3}{5}$ Lothe vom 10 löthigen Silber $\frac{3}{5} \times 10 = \frac{30}{5} = 6$ Theile reines Silber und die $\frac{2}{5}$ vom

15 löthigen enthalten $\frac{2}{5} \times 15 = \frac{30}{5} = 6$ Theile reines Silber. Daher sind in dem gemischten Lothe $6 + 6$ oder 12 reine Silbertheile und dieses gemischte Silber ist 12 löthig, wie es die Aufgabe fordert.

§. 272. Zusatz. Wenn der Fall Statt hat, daß man bey den Aufgaben in §. 271. irgend eine bestimmte größere Menge des Gemisches und folglich die einzelnen Hergaben hierzu finden sollte, so suche man zuerst nach §. 271. die besondern Hergaben für die Einheit des Gemisches und multiplicire jede derselben mit der angegebenen Größe des ganzen Gemisches, so zeigen die beyden Producte die Hergaben zur ganzen Mischung an. Wenn man z. B. in dem I. Beysp. des §. 271. eine Menge von 80 Maaßen Wein zusammenmischen wollte, so würde die Hergabe des 12 Batzen-Weins $= \frac{5}{8} \times 80 = \frac{400}{8} = 50$ Maaße und jene des 20 Batzen-Weins $= \frac{3}{8} \times 80 = \frac{240}{8} = 30$ Maaß seyn. Und hier ist wieder $50 + 30 = 80$, so wie auch $50 \times 12 + 30 \times 20 = 600 + 600 = 1200 = 80 \times 15$ ist.

§. 273. Anmerkung. Aus dem Bisherigen ergibt sich für die Auflösung der Aufgaben in §. 271. folgende Regel: Man ziehe von dem höhern Preise den Mittelpreis und von dem Mittelpreise den niedern ab, so bestimmen diese Unterschiede in der genannten Ordnung die verhältnißmäßigen Hergaben des Körpers von dem geringern und höhern Werthe zur Mischung, wo dann nun nach den Regeln der Gesellschaftsrechnung die wirkliche Hergabe für eine bestimmte Größe der Mischung leicht gefunden werden kann.

§. 274. Anmerkung. Nebst den bisherigen Aufgaben kommen öfters Fälle vor, wo aus drey oder mehreren angegebenen Preisen ein gewisser Mittelpreis gefunden werden soll. Obgleich nun hier durch die Regeln der gemeinen Rechen-

kunst die verhältnißmäßigen Hergaben, wenigstens für einen Fall, bestimmt werden können, so lehrt jedoch erst die Algebra, wie man diese einzelne Zugaben dergestalt findet kann, daß der Foderung auf mehr als eine Art Genüge geschieht, welches für die Ausübung sehr vortheilhaft ist.

IV. Die Kettenregel.

§. 275. Erklärung. Zur Kettenregel gehören alle jene Aufgaben, wo man das unbekannte Verhältniß einer gegebenen Größe zu einer andern gegebenen durch mehrere (und oft viele) bekannte Zwischenverhältnisse bestimmen soll. Z. B. man will das Verhältniß des Reichsthalers zur Ducate finden und weiß, daß sich der Reichsthaler zum Kopfstücke wie 9 : 2, das Kopfstück zum Gulden wie 1 : 3 und der Gulden zur Ducate wie 1 : 5 verhalte.

§. 276. Zusatz. Aus dieser Erklärung folgt:

I. Daß aus dem gegebenen Verhalten bekannter Größen das unbekannte Verhältniß zweyer angegebenen Dingen berechnet werden soll; wie in §. 275 das Verhältniß des Reichsthalers zur Ducate aus den dortigen angegebenen Mittelverhältnissen.

II. Daß in dem ersten Verhältnisse der ersten Proportion das zweyte Glied das nämliche ist, welches als erstes Glied in dem ersten Verhältnisse der zweyten Proportion steht. Daß ferner das zweyte Glied dieses Verhältnisses wieder als erstes in die folgende Proportion kömmt und so weiter, wodurch nun die beyden Dinge, deren Verhältniß man sucht, als erstes Glied der ersten und als zweytes Glied der letzten Proportion vorkommen. Will man die Proportionen in §. 275. nach dieser Bestimmung ordnen, so stehen sie so:

Rchsthlr. : Kopfstück = 9 : 2
Kopfstück. : Gulden = 1 : 3
Gulden. : Ducate = 1 : 5

§. 277. Aufgabe. Eine allgemeine Weisung zu geben, wie die bey der Kettenregel vorkommenden Fälle zu berechnen sind.

Auflösung und Beweis.

I. Das zu bestimmende Verhältniß sey a : f (wo man sich, wie in §. 269. unter diesen Buchstaben jede mögliche benannte oder unbenannte Zahl vorstellen kann); die gegebenen Zwischenverhältnisse hingegen seyen folgende: 1) a : b = m : n; 2) b : c = o : p; 3) c : d = q : r; 4) d : e = s : t und 5) e : f = u : v.

II. Man setze diese Verhältnisse so untereinander, daß immer das zweyte Glied des ersten Verhältnisses das erste Glied des unter ihm stehenden zweyten werde, u. s. f. so erhält man aus I. Folgendes:

a : b = m : n
b : c = o : p
c : d = q : r
d : e = s : t und endlich
e : f = u : v

III. In diesen Proportionen bilde man die Producte aus allen gleichnamigen Gliedern, so geben dieselbe folgende neue Proportion $a \times b \times c \times d \times e : b \times c \times d \times e \times f = m \times o \times q \times s \times u : n \times p \times r \times t \times v$ (§. 215.).

IV. Das erste Verhältniß dieser Proportion enthält die gemeinschaftlichen Factoren b, c, d und e, welche sich in beyden aufheben (§. 212, I.). Folglich hat man: $a : f = m \times o \times q \times s \times u : n \times p \times r \times t$

$\times$ v wodurch alle Zwischenglieder in den ersten Verhältnissen der Proportionen in II. hinwegfallen. Allein das letzte Verhältniß ist hier bekannt, weil es aus bekannten Factoren besteht. Folglich ist auch das Verhältniß a : f bestimmt und die Aufgabe aufgelöset.

Beyspiele. I. Die Aufgabe in §. 275. würde so aufgelöst, daß man den Ansatz nach §. 276, II. machte, woraus denn nach der Vorschrift der obigen Auflösung folgt, daß:

Rchsthlr. : Duc. $= 9 \times 1 \times 1 : 2 \times 3 \times 5$ d. h. Rchsthlr. : Duc. $= 9 : 30 = 3 : 10$.

II. Wieviele Conventionsthaler kostet 1 Ballen Schreibpapier, wenn sich der Ballen zum Rieß verhält, wie 10 : 1, der Rieß zum Buch wie 20 : 1, das Buch zum Bogen, wie 24 : 1, der Bogen zum Heller wie 3 : 1 (d. h. 1 Bogen kostet 3 Heller), der Heller zum Kreuzer wie 1 : 8, der Kreuzer zum Gulden wie 1 : 60 und der Gulden zum Conventionsthaler wie 1 : 2 $\frac{2}{5}$?

Hier ist der Ansatz dieser:

Ballen : Rieß = 10 : 1
Rieß : Buch = 20 : 1
Buch : Bogen = 24 : 1
Bogen : Heller = 3 : 1
Heller : Kreuzer = 1 : 8
Kreuzer : Gulden = 1 : 60
Gulden : Conv. Thlr. = 1 : 2 $\frac{2}{5}$

Ballen : Conv. Thlr. $= (10 \times 20 \times 24 \times 3) : (8 \times 60 \times 2\frac{2}{5}) = 200 \times 72 : 480 \times \frac{12}{5} = 200 \times 360 : 480 \times 12 = 7200 : 576 = 12\frac{1}{2}$. Daher kostet 1 Ballen dieses Papiers 12 $\frac{1}{2}$ Conventionsthaler.

§. 278. Zusatz. I. Die zur Kettenregel gehörigen Aufgaben könen auch nach dem oben bemerkten Reesischen Ansatze aufgelöset werden, was hier noch zu erläutern ist. Die Frage sey diese: Man kauft in England 224 ℔ Kaffe für $5\frac{3}{4}$ Pfund Sterling. Was kostet 1 Baierisches Pfund in baierischem Gelde, da 1 Pf. Sterling mit 11 fl 17 Kr. einerley ist, und 29 englische Pfunde soviel betragen als 23 baierische Pfunde?

II. Man sieht leicht, daß sich diese Frage folgendergestalt ordnen läßt: Was kostet 1 baierisches Pfund in Kreuzern, wenn 23 baierische Pfunde soviel sind als 29 englische Pfunde; wenn 224 englische Pfunde $5\frac{3}{4}$ Pfund Sterling kosten, und wenn 1 Pf. Sterling soviel als 11 Gulden 17 Kr. beträgt?

III. Durch Hülfe der gewöhnlichen Regel Detri läßt sich diese Aufgabe so auflösen, daß man nach und nach folgende drey Fragen beantwortet:

a) Wenn 11 fl 17 Kr. soviel als 1 Pf. Sterling betragen, wieviele Gulden und Kreuzer geben $5\frac{3}{4}$ Pf. Sterlinge? Dieses vierte Glied heisse x.

b) Wenn x Gulden und Kr. der Preis von 224 englischen Pfunden ist, was werden 29 englische Pfunde kosten? Diesen neuen Preis nenne man y.

c) Wenn 29 englische Pfunde, oder 23 baierische Pfunde y Gulden und Kreuzer kosten, was ist der Preis von 1 baierischem Pfunde? Dieser heisse z.

IV. Bildet man nach den bekannten Regeln diese drey Proportionen, so entsteht folgender Ansatz:

a) 1 Pf. St. : $5\frac{3}{4}$ Pf. St. = 11 fl 17 kr. : x

b) 224 engl. ℔ : 29 engl. ℔ = x : y

c) 23 baier. ℔ : 1 baier. ℔ = y : z

Oder in reinen Zahlen:

$$1 : 5\tfrac{3}{4} = 11\tfrac{17}{60} : x$$
$$224 : 29 = x : y$$
$$23 : 1 = y : z,$$

woraus $z = \frac{1 \times 29 \times 5\frac{3}{4} \times 11\frac{17}{60}}{23 \times 224 \times 1}$ wird.

V. Da man aus der Natur der Aufgabe folgende vier Gleichungen bilden kann:

1 Pf. Sterling = 11 fl 17 Kr.; 224 engl. ℔ = 5 ¾ Pf. Sterl.; 23 baier. ℔ = 29 engl. ℔, und z fl und Kr. = 1 baier. ℔, so läßt sich hieraus, nach Reesischer Art, folgender Ansatz bilden:

z Guld. u. Kr = 1 baier. ℔
23 baier. ℔ = 29 engl. ℔
224 engl. ℔ = 5 ¾ Pf. Sterl.
1 Pf. Sterl. = 11 Guld. 17 Kr.,

welcher auf die gewöhnliche Art so aufgelöset wird, daß man das Product aller Zahlen zur Rechten des Gleichheitszeichens mit dem Producte aus allen Zahlen zur Linken dieses Zeichens dividirt, wodurch $z = \frac{1 \times 29 \times 5\frac{3}{4} \times 11\frac{17}{60}}{23 \times 224 \times 1}$ wird, wie vorhin in IV.

VI. Wird dieser Werth für z berechnet, so erhält man z in Kreuzern durch den Ausdruck

$z = \frac{29 \times \frac{23}{4} \times 677}{23 \times 224} = \frac{29 \times \frac{1}{4} \times 677}{224} = \frac{29 \times 677}{896} = \frac{19633}{896}$ = 21 Kreuzer, 3 Pfennige und etwas darüber.

§. 279. Zusatz. Man sieht hieraus, wie die Aufgaben der Kettenregel am Ende auf der gewöhnlichen Regel Detri beruhen, und durch sie aufgelöset werden können. Doch gewährt der Kettensatz nach Reesischer Manier eine vorzügliche Bequemlichkeit für das practische Rechnen. Daher sollen hier noch folgende Beyspiele

(welche aus der sehr zu empfehlenden Schrift: Die Rechenkunst u. s. w. von J. G. Prändel. Amberg, 1812 entlehnt sind) zur Uebung in dem Ansatze eine Stelle finden.

I. Beyspiel. Ein hiesiger Bankier kauft einen Wechselbrief von 12400 Franken. Weil er aber erst nach einigen Monaten zahlbar ist, darf er $2\frac{1}{2}$ fl von 100 fl rabattiren, d. h. für jedes 100 fl nur $97\frac{1}{2}$ fl bezahlen. Was muß der Käufer für diesen Wechsel in unserm Gelde erlegen, da 80 Franken soviel als 81 Livres und 24 Livres soviel als 11 fl betragen?

Der Ansatz wird dieser:

x fl mit Rabatt?	12400 Franken
80 Frank.	81 Livres
24 Livres	11 Gulden
100 Gulden	$97\frac{1}{2}$ mit Rabatt

Werden nun die Glieder zur Rechten und zur Linken des Senkstrichs gehoben, so findet man x = 5610 Gulden, 30 Kr. $3\frac{3}{4}$ Pf.

II. Beyspiel. Der große Solnstein, einer der höchsten Berge Tyrols, mißt bis zu seinem Gipfel $1584\frac{1}{3}$ pariser Toisen. Was beträgt diese Höhe nach baierischem Maaße, da 1 Toise so groß ist, als 6 pariser Fuß und 1 par. Fuß $129\frac{10}{100}$ baierische Linien enthält, deren 144 einen baierischen Fuß betragen?

Nennt man die zu findenden baierischen Fuße x, so ist der Ansatz dieser:

x baier. Schuhe = $1584\frac{1}{3}$ Toisen
1 Toise = 6 paris. Schuh
1 par. Sch. = $129\frac{10}{100}$ baier. Lin.
144 baier. Lin. = 1 baier. Schuh.

Wird diese Rechnung durchgeführt, so erhält man $x = 8528\frac{1}{3}$ baierische Schuhe.

III. Beyspiel. Ein Amberger Wechselhaus hatte Gelegenheit hannöverische Scheidemünze, die man Rössel nennt, einzuwechseln und dieselbe wieder an Ort und Stelle zu senden. Was gewann es an 100 fl da es für 1 Rössel $7\frac{1}{2}$ Kreuzer gab und in Hannover für 4 Rössel 1 Frank 6 Sols bekam? Bekanntlich betragen 80 Franken soviel als 81 Livres, 24 Livres machen 11 Gulden, und 20 Sols gehen auf 1 Franken.

Nennt man den zusuchenden Gewinn an 1 Hundert Gulden x, so ist der Ansatz dieser:

x Gulden	=	100 Auslage
1 Gulden	=	60 Kreuzer
$7\frac{1}{2}$ Kreuz.	=	1 Rössel
4 Rössel	=	1 Fr. 6 Sols
20 Sols	=	1 Franke
80 Franken	=	81 Livres.
24 Livres	=	11 Gulden

Das Resultat der ausgeführten Rechnung gibt $x = 120\frac{21}{32}$ Gulden; folglich ist $20\frac{21}{32}$ der gesuchte Procentgewinn.

IV. Beyspiel. Um in Wechselgeschäften das Steigen und Fallen des Geldes auf den drey vornehmsten Handelsplätzen: Hamburg, Amsterdam und Venedig sicherer beurtheilen zu können, haben die Augsburger Kaufleute den sogenannten Girofuß eingeführt, nach welchem 100 Reichsthaler Girogeld durchgehends 127 Reichsthaler Currentgeld (20 Guldenfuß) ausmachen. Nun sollen nach Hamburg zu einer Zeit, wo 100 Reichsthaler dortiges Bankgeld $116\frac{1}{8}$ Reichsthaler Girogeld

werth sind, eine Summe von 2490 Reichsthaler bezahlt werden. Wieviel Gulden rheinisch hat man dazu nöthig? Bekanntlich wird 1 Reichsthaler zu $1\frac{1}{2}$ Current und 5 fl Current werden zu 6 fl rheinisch gerechnet.

Hier ist der Ansatz:

x fl rheinisch = 2490 Rthlr Bankg.
100 Rthlr. Bankg. = $116\frac{1}{8}$ Rthlr Girog.
1 Rthlr Girog. = $1\frac{1}{2}$ Guld. Curr.
5 Guld. Curr. = 6 Guld. rheinisch

Als Resultat der durchgeführten Rechnung ergibt es sich, daß die 2490 Rthlr Bankgeld soviel als 6609 Gulden 59 Kreuzer $3\frac{200}{500}$ Pf. rhein. betragen.

§. 280. Anmerkung. In der bis hierher entwickelten Theorie der Proportionsrechnungen ist der Grund der so höchst mannigfaltigen practischen Anwendung dieser nützlichen Lehre enthalten. Wenn es das Bedürfniß des Schülers erfodert, so kann das Practische leicht weiter ausgeführt werden.

Zur Nachricht.

Der Haupttitel wird voran, und nach diesem der des Ersten Theiles gebunden.

p. 121

Bayerische StaatsBibliothek
Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Hoffmann, Johann Josef Ignaz <<von>>,

Anleitung zur Elementar-Arithmetik

Bd.: 1

Offenbach 1819

Math.p. 224 g-1
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10082047-7